QA
1
J6836
sér.3
t.5E

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3journaldemathm05pari

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

3e SÉRIE

TOME CINQUIÈME

Année 1891.

36917
21/1/92

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1891

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

APPLICATIONS

DE LA THÉORIE DU CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES (*)

COORDONNÉES QUADRIPOLAIRES

Par M. **L. Bénezech.**

1. — Équation générale des sphères en coordonnées barycentriques. — Soient $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ les coordonnées barycentriques, par rapport au tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$, du centre O d'une sphère de rayon ρ et d'un point quelconque M de cette sphère. On a :

$$\Sigma\alpha_1\overline{OA_1}^2 = \Sigma\alpha_1\overline{MA_1}^2 + \rho^2\Sigma\alpha_1$$

ou

$$\Sigma\alpha_1\left(\overline{A_1O}^2 - \rho^2\right) = \frac{\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12}}{V}.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad V(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4) - \Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} = 0,$$

en appelant p_1, p_2, p_3, p_4 les puissances des sommets du tétraèdre, par rapport à la sphère O. En supposant $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$, on a $\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} = 0$ C'est, comme nous l'avons montré déjà (**), l'équation barycentrique de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence.

(*) Voyez, sur ce sujet, un premier article de M. Bénezech (*Journal* 1890, pp. 123, 145). G. L.

(**) A propos de cette équation, voyez un autre article de M. Bénezech (*Journal*, 1890, p. 241) et la Note placée au bas de la page 243. G. L.

2. — Nous avons montré qu'entre les coordonnées barycentriques α_1, α_2, α_3, α_4 d'un point quelconque d'une sphère de centre O et de rayon ρ, il existe la relation :

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} - V\Sigma\alpha_1\left(\overline{A_1O}^2 - \rho^2\right) = 0.$$

Inversement, toute équation de la forme

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} - V\Sigma\alpha_1 u_1 = 0,$$

représente une sphère dont le centre O est déterminé par les relations : $\overline{A_1O}^2 - \overline{A_2O}^2 = u_1 - u_2$,

$\overline{A_2O}^2 - \overline{A_3O}^2 = u_2 - u_3$, etc.

Ainsi, l'équation $\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} + K = 0$ (dans laquelle K désigne une constante), équation qui peut se mettre sous la forme

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} - V\Sigma\alpha_1 \frac{-K}{V^2} = 0,$$

représente une sphère concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre de référence. En effet, on a

$$\overline{A_1O}^2 - \overline{A_2O}^2 = \overline{A_2O}^2 - \overline{A_3O}^2 = \ldots = 0$$

et, par suite, $A_1O = A_2O = \ldots = R$.

Le rayon de cette sphère est donné par la formule

$$\rho^2 = R^2 + \frac{K}{V^2}.$$

En supposant $K = 0$, on voit encore, par cette observation, que l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence est : $\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} = 0$, résultat connu.

3. *Équation de la sphère* $O\rho$, *en coordonnées quadripolaires.* — Soient λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les distances d'un point quelconque M de cette sphère aux sommets du tétraèdre de référence. Ces quantités, que nous appellerons coordonnées quadripolaires du point M, vérifient la relation :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \lambda_1^2 \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & \lambda_2^2 \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & \lambda_3^2 \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & \lambda_4^2 \\ 1 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées barycentriques du centre O étant α'_1, α'_2, α'_3, α'_4, on a :

$$\Sigma\alpha'_1\lambda_1^2 = \Sigma\alpha'_1\overline{OA_1}^2 + V\rho^2,$$

ou
$$\Sigma\alpha'_1\lambda_1^2 - \frac{\Sigma\alpha'_1\alpha'_2 d_{12} + V^2\rho^2}{V} = 0.$$

Cette relation, entre les coordonnées quadripolaires d'un point quelconque de la sphère, est l'équation cherchée.

Réciproquement, toute équation de la forme (3) $\Sigma u_1\lambda_1^2 + K = 0$, dans laquelle $\Sigma u_1 = V$ représente une sphère dont les coordonnées barycentriques du centre sont u_1, u_2, u_3, u_4 et dont le rayon ρ est donné par la formule $\rho^2 = \frac{KV - \Sigma u_1 u_2 d_{12}}{V^2}$. Si Σu_1 était différent de V, on pourrait toujours ramener l'équation à la forme précédente en multipliant son premier membre par un facteur constant convenablement choisi, à moins, cependant, que Σu_1 ne soit nul, auquel cas l'équation représente un plan.

On verrait encore, sans difficulté, 1° que toute équation quadripolaire de la forme (3), dans laquelle le terme en λ_1 manque, représente une sphère dont le centre est situé dans le plan $A_2A_3A_4$; 2° qu'elle représente une sphère dont le centre est situé sur l'arête A_3A_4, lorsque les termes en λ_1, λ_2 manquent; 3° enfin, qu'elle représente une sphère, dont le centre coïncide avec le sommet A_4, lorsque les termes en λ_1, λ_2, λ_3 n'existent pas.

4. — Proposons-nous de déterminer le centre d'une sphère de rayon donné, dont l'équation quadripolaire ait la forme $\Sigma u_1\lambda_1^2 + K = 0$, K étant une quantité donnée. Les coordonnées barycentriques u_1, u_2, u_3, u_4 du centre de cette sphère vérifient la relation :

$$\rho^2 = \frac{-\Sigma u_1 u_2 d_{12} + KV}{V^2},$$

c'est-à-dire
$$\Sigma u_1 u_2 d_{12} + V^2\rho^2 - KV = 0.$$

D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, le point cherché se trouve sur une sphère concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre de référence, et dont le rayon est donné par la formule :

$$\rho'^2 = R^2 + \rho^2 - \frac{K}{V}.$$

En particulier, lorsque $K = 0$, $\rho'^2 = R^2 + \rho^2$, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Toute équation quadripolaire de la forme $\Sigma u_1 \lambda_1^2 = 0$, *représente une sphère orthogonale à la sphère circonscrite au tétraèdre de référence ;* RÉCIPROQUEMENT, *lorsqu'une sphère coupe orthogonalement la sphère circonscrite au tétraèdre de référence, son équation quadripolaire a la forme* $\Sigma u_1 \lambda_1^2 = 0$.

Ce théorème permet de trouver la relation qui existe entre les distances respectives de quatre points quelconques M_1, M_2, M_3, M_4, d'une sphère, à quatre autres points quelconques A_1, A_2, A_3, A_4, d'une seconde sphère qui coupe orthogonalement la première.

On a en effet :

$$u_1 . \overline{M_1A_1}^2 + u_2 . \overline{M_1A_2}^2 + u_3 . \overline{M_1A_3}^2 + u_4 . \overline{M_1A_4}^2 = 0,$$

avec trois équations analogues pour les points M_2, M_3, M_4 ; et en éliminant u_1, u_2, u_3, u_4 entre ces quatre équations homogènes, on obtient la relation cherchée :

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & \overline{M_1A_4}^2 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & \overline{M_2A_4}^2 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & \overline{M_3A_4}^2 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & \overline{M_4A_4}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

5. *Puissance* p *d'un point* P $(\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'', \alpha_4'')$, *par rapport à la sphère* O. — L'équation de la sphère O, en coordonnées barycentriques, est :

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \Sigma d_{12}(\alpha_1' - \alpha_1)(\alpha_2' - \alpha_2) + V^2\rho^2 = 0,$$

d'ailleurs, d, désignant la longueur PO, on a :

$$\Sigma d_{12}(\alpha_1' - \alpha_1'')(\alpha_2' - \alpha_2'') + V^2 d^2 = 0,$$

relation qui peut s'écrire :

$$\Sigma d_{12}(\alpha_1' - \alpha_1'')(\alpha_2' - \alpha_2'') + V^2(d^2 - \rho^2) + V^2\rho^2 = 0.$$

On en tire :

$$(4) \quad p = \frac{\Sigma d_{12}(\alpha_1' - \alpha_1'')(\alpha_2' - \alpha_2'') + V^2\rho^2}{V^2} - \frac{f(\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'', \alpha_4'')}{V^2}.$$

Ainsi la puissance d'un point, par rapport à une sphère dont on connaît l'équation en coordonnées barycentriques, s'obtient en mul-

tipliant par $-\frac{1}{V^2}$ *ce que devient le premier membre de cette équation lorsqu'on y remplace les coordonnées courantes par les coordonnées du point donné* (*).

(A suivre.)

SUR L'ÉVALUATION DES MOYENNES

(APPLICATION PRATIQUE)

Par M. **C. A. Laisant**, docteur ès sciences.

Dans l'une des dernières séances de la Société philomathique, M. Azoulay, membre de cette Société, a présenté diverses remarques intéressantes, concernant des questions de moyennes. L'origine de ces observations est relative aux évaluations de la vitesse des navires de la Compagnie transatlantique, question importante, visant les rapports de cette Compagnie avec l'État.

Si l'on considère un ensemble de voyages, chacun d'eux est effectué avec une vitesse moyenne. Si l'on fait la moyenne arithmétique V, de ces vitesses, on a un certain résultat. Si, au contraire, on divise la somme des chemins parcourus par la somme des temps employés à les parcourir, on aura un résultat V′ très différent du premier en général. Cependant, les deux procédés paraissent rationnels l'un et l'autre, et on se trouve actuellement en présence d'une difficulté qu'on n'avait pas prévue lors de la rédaction du cahier des charges.

On peut se rendre compte, comme il suit, de la différence qui existe entre V et V′. Soient l_1, l_2, ... l_n les longueurs des divers parcours; t_1, t_2, ... t_n les temps correspondants, et v_1, v_2, ... v_n les vitesses moyennes correspondantes.

On a

(*) Comparez *Mathesis* 1890, p. 51. Lorsque l'équation barycentrique est posée sous la forme que nous avons appelée *(loc. cit.)* FORME NORMALE, la puissance s'obtient en remplaçant les coordonnées courantes par les coordonnées particulières du point considéré. *G. L.*

$$V = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n} = \frac{\frac{l_1}{t_1} + \frac{l_2}{t_2} + \ldots + \frac{l_n}{t_n}}{n},$$

$$V' = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}.$$

Un cas particulier, qui se présente dans la pratique, le seul que nous voulions examiner ici, est celui où tous les voyages considérés se rapportent à une même ligne, si bien que $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$.

On a alors $$V = \frac{l}{n}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right),$$

$$V' = \frac{l_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n};$$

si nous appelons t_h la moyenne harmonique des temps et t_a, leur moyenne arithmétique, on a

$$\frac{n}{t_h} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n},$$

$$t_a = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}.$$

Ainsi, $$V = \frac{l}{t_h}, \qquad V' = \frac{l}{t_a}.$$

Or, on sait que $t_h < t_a$, ainsi qu'il résulte de l'inégalité évidente

$$(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right) > n^2.$$

On a donc $$V > V',$$

c'est à dire que, pour ce cas des parcours égaux, la moyenne des vitesses est supérieure à la vitesse moyenne générale.

LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE, EN 1890;

Par M. **E. Vigarié.**

Depuis quelques années, nous avons essayé de vulgariser l'étude de la géométrie du triangle et de faire connaître, aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*, les points les plus inté-

ressants de cette partie nouvelle de la science géométrique. Nous avons pensé que l'indication *sommaire* des progrès accomplis par elle, pendant l'année écoulée, présenterait quelque intérêt. C'est le but de la présente Note.

1. Systèmes de coordonnées. — Depuis l'origine de la géométrie du triangle, on s'est servi, presque exclusivement, des coordonnées normales et des coordonnées barycentriques. Les remarquables études de M. Lucas (*Mathesis* 1889) et de M. Poulain (*J. S.* 1889), sur les coordonnées tripolaires, ont donné à ce système, peu connu, une grande importance. M. Lemoine s'en est notamment servi (*Contributions à la géométrie du triangle*, *A. F.* 1889, pp. 197-222) (*) dans plusieurs questions relatives aux points tripolairement associés, aux points jumeaux, etc.

En associant d'une certaine manière les coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques, on obtient un nouveau système dans lequel les coordonnées sont prises par rapport à des axes mobiles et que M. Cesáro appelle *coordonnées d'inertie*. Le savant professeur de l'Université de Palerme avait déjà montré (*Remarques sur la Géométrie du triangle*, *N. A. M.*, 1887, pp. 215-242; *sur la potentielle triangulaire*, *N. A. M.*, 1888) tous les avantages qu'on peut tirer de la considération d'un pareil système de coordonnées dans, l'étude particulière du triangle. Dans un récent travail (*Sur l'emploi des coordonnées barycentriques*, *M.*, 1890, pp. 177-190), M. Cesáro vient d'en faire une nouvelle application qui lui a permis d'énoncer une multitude de propositions intéressantes. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de nous étendre plus longuement sur ce sujet.

A ces systèmes, il faut joindre celui des coordonnées angulaires, proposé par M. Poulain (*J. S.*, 1890, *Question 282*).

2. Figures semblables. — La théorie des figures directement et inversement semblables qui a servi si souvent a

(*) Les comptes rendus des séances de l'Association française ne paraissant que dans l'année qui suit celle où le congrès a été tenu, nous analysons ici les communications faites au congrès de Paris en 1889.

trouver de nouvelles propositions et à donner d'élégantes démonstrations de beaucoup d'autres (cercles de Brocard, de Neuberg, de M'Cay..., par exemple) vient encore d'être complétée. M. Schoute a énoncé (Sur les figures planes directement semblables. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, 6 octobre 1890)* les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Dans un plan qui contient deux figures directement semblables* F_1 *et* F_2, *on construit, sur le segment* A_1A_2 ($OA_1A_2A_3$ *est un quadrangle de forme invariable dont le sommet* O *est fixe*) *de la droite qui joint deux points homologues* A_1 *et* A_2 *de* F_1 *et* F_2, *comme base, un triangle* $A_1A_2A_3$ *directement semblable à un triangle* $B_1B_2B_3$, *donné. Si les points* A_1 *et* A_2 *parcourent les figures données* F_1 *et* F_2, *le troisième sommet* A_3 *décrit une troisième figure* F_3 *directement semblable à* F_1 *et* F_2. *Et les trois figures admettent, deux à deux, le même point double* O.

De ce théorème intuitif et très général découlent, comme cas particuliers, les théorèmes suivants en apparence plus compliqués :

Théorème II. — *Dans le plan des figures* F_1 *et* F_2 *il existe une troisième figure* F_3 *directement semblable à* F_1 *et* F_2, *de manière que le lieu du point d'intersection* P *des tangentes homologues* t_1 *et* t_2 *de deux courbes homologues* C_1 *et* C_2 *de* F_1 *et* F_2 *soit la podaire de la courbe homologue* C_3 *de* F_3 *par rapport à un point déterminé, le point double* O *de* F_1 *et* F_2, *qui est en même temps le point double commun de* F_1, F_2, F_3.

Théorème III. — *De plus, il existe dans le même plan une figure* F_α *directement semblable à* F_1 *et* F_2, *de manière que l'enveloppe de la droite* t_α *menée par le point d'intersection* P *de* t_1 *et* t_2 *pour laquelle l'angle* (t_1, t_α) *est égal à un angle donné* α, *soit la courbe homologue* C_α *de* F_α. *Si* α *varie, les figures* F_α *forment un faisceau tangentiel (lieu des points correspondants* P_α = *un cercle, enveloppe des droites correspondantes* d_α = *un point) qui embrasse* F_1 *et* F_2 *et dont le point double* O *de* F_1 *et* F_2 *est le point double commun.*

Théorème IV. — *Dans le plan des deux figures* F_1 *et* F_2, *où l'on a fixé deux points homologues quelconques* A_1 *et* A_2, *il existe une figure* F_μ *directement semblable à* F_1 *et à* F_2 *et un point* A_μ *de manière que le lieu du point* P_μ *divisant dans un rapport donné* μ *le segment* P_1P_2 *de la droite qui joint la projection* P_1 *de* A_1 *sur la tangente* t_1 *de la courbe* C_1 *de* F_1 *à la projection* P_2 *de* A_2 *sur la droite homologue* t_2 *de* F_2 *soit la podaire de la courbe homologue* C_μ *de* F_μ *par rapport à* A_μ. *Le point* A_μ *se trouve sur* A_1A_2 *et divise ce segment dans le rapport donné* μ. *Si* μ *varie, les figures* F_μ *forment un faisceau ponctuel (lieu des points correspondants* P_μ = *une droite, enveloppe des droites correspondantes* d_μ = *une parabole) qui embrasse* F_1 *et* F_2, *et dont le point double* O *de* F_1 *et* F_2 *est le point double commun.*

Si l'on remplace, dans ce dernier énoncé, les deux points homologues A_1 et A_2 qui y entrent par le point Q_1 de F_1 et le

point R_2 de F_2 qui ne se correspondent pas, le point homologue de Q_1 de F_1 en F_2 étant Q_2 et celui de R_2 de F_2 en F_1 étant R_1 on trouve :

Théorème V. — *Dans le plan des deux figures directement semblables* F_1 *et* F_2 *et des points* Q_1 *et* R_2, *il existe encore une figure* F_μ *directement semblable à* F_1 *et* F_2 *en un point* S_μ, *de manière que le lieu du point* P_μ *divisant dans le rapport donné* μ *le segment* P_1P_2 *de la droite qui joint la projection* P_1 *de* Q_1 *sur la tangente* t_1 *de la courbe* C_1 *de* F_1 *à la projection* P_2 *de* R_2 *sur la droite homologue* t_2 *de* F_2 *soit la podaire de la courbe homologue* C_μ *de* F_μ *par rapport à* S_μ. *Si* μ *varie, le point* S_μ *décrit une cubique circulaire et unicursale. Et les points* F_1 *et* F_2, *homologues aux points* S_μ *des figures* F_μ, *parcourent les circonférences de cercle décrites sur* Q_1R_1 *et* Q_2R_2 *comme cordes et capables de l'angle des figures* F_1 *et* F_2 *formé par* Q_1R_1 *et* Q_2R_2.

M. Schoute termine sa communication par l'énoncé de deux problèmes qui se résolvent facilement par l'emploi du dernier théorème.

Nous devons mentionner ici un Mémoire très étendu (86 pages) et particulièrement important, dû à M. Neuberg. L'abondance et la diversité des matières traitées, le nombre considérable de théorèmes énoncés dans ce travail ne nous permettent pas, à notre grand regret, d'en faire une analyse suffisamment complète pour en donner une idée, même approchée. Nous ne pouvons mieux faire que d'en conseiller la lecture. Tous ceux qui connaissent M. Neuberg savent avec quelle puissance et quelle précision ses Mémoires sont écrits, et tout le fruit qu'on peut retirer de leur étude.

Dans la première partie de son ouvrage (*Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe, et sur le système de trois figures directement semblables. Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XLIV, 1890), M. Neuberg étudie plusieurs séries de triangles (séries affixes, orthologiques, axiales, modulaires, podaires et antipodaires) qui lui permettent de donner d'élégantes solutions de questions incomplètement résolues dans plusieurs publications mathématiques. Il donne aussi de nombreuses propositions sur *les points tripolairement associés*, *les points jumeaux*, *les cercles de Schoute*, etc. Ces diverses études géométriques sont suivies de développements analytiques. Dans la seconde partie (pp. 49-86), qui est en quelque sorte

une application des idées générales contenues dans la première, M. Neuberg étudie et complète la théorie des figures directement semblables. Il termine en appliquant cette théorie à plusieurs cas particuliers.

(A suivre.)

VARIÉTÉS (*)

ESSAI SUR UN PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (A)

Par M. **Humbert**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Algèbre.

1. — Idée du nombre entier. — But des quatre opérations simples de l'Arithmétique. — Introduction des nombres entiers négatifs, des nombres fractionnaires positifs et négatifs. — Extraction des racines arithmétiques. — Introduction des nombres irrationnels positifs et négatifs. — Montrer

(*) On sait que, dans l'enseignement secondaire français, les principaux lycées sont pourvus d'une classe désignée sous le nom de *Mathématiques élémentaires (A)*. Les élèves qui suivent ce cours se destinant à l'École Polytechnique ou à l'École Normale, leur but est d'entrer, l'année suivante, en Mathématiques spéciales. Ils sont (ou ils doivent être) Bacheliers; aucun examen ne les attend à la fin de cette année d'études qui se trouve ainsi dépourvue d'un programme déterminé. En causant un jour de cette situation avec M. Humbert, qui occupe la chaire de Mathématiques élémentaires (A), au lycée Louis-le-Grand, nous fûmes amenés à penser qu'il serait peut-être utile de poser les lignes principales des matières qui pourraient, le plus utilement, être développées dans le cours, pour atteindre le but qu'il se propose, c'est-à-dire encore une fois, *la préparation au cours de Mathématiques spéciales*. J'ai proposé à mon collègue de m'indiquer dans quelques pages, que je lui demandai la permission de publier, ses idées personnelles sur ce point pédagogique. Je commence aujourd'hui la publication des notes que M. Humbert m'a remises, pour répondre au désir que je lui avais manifesté; mais je n'ai pas besoin d'ajouter, au nom de M. Humbert, comme au mien, qu'elles doivent être considérées comme constituant un premier aperçu du programme en question et si elles soulèvent de la part de quelques uns de nos lecteurs des observations intéressantes, je les ferai connaître avec le plus grand plaisir. G. L.

que l'ensemble des nombres rationnels positifs et négatifs offre l'apparence de la continuité. — Racine carrée d'un nombre négatif. — Introduction du symbole i, conventions relatives à ce symbole. — Résoudre l'équation du second degré $ax^2 + 2bx + c = 0$, afin de faire voir comment s'introduit le symbole complexe $a + bi$. (Sur tout ce qui précède, ne dire que des généralités et faire une seule leçon.)

2. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une imaginaire soit nulle. — Somme de plusieurs imaginaires. — Différence de deux imaginaires. — Imaginaires égales et de signes contraires. — Imaginaires égales. — Les expressions imaginaires ne peuvent pas être classées par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes. — Produit de deux imaginaires, de plusieurs imaginaires, puissance d'une imaginaire. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de facteurs soit nul. — Imaginaires conjuguées. — Quotient de deux imaginaires, deux méthodes. — Racines carrées d'une imaginaire. — Résolution de l'équation du second degré à coefficients imaginaires.

3. — Analyse combinatoire, arrangements, permutations, combinaisons. — Problèmes divers concernant ces divers modes de groupement. — Propriétés simples du symbole C_m^p.

4. — Polynômes entiers, réels ou imaginaires. — Forme de la valeur numérique d'un polynôme entier. — Polynômes ordonnés, — Les trois premières opérations sur les polynômes entiers se font comme celles qui concernent les sommes algébriques générales. — Manière d'effectuer le produit de plusieurs sommes algébriques. — Cas particulier des polynomes entiers, termes irréductibles. — Binôme de Newton. — Applications et exemples. — Démontrer qu'on peut développer les diverses puissances de $x + a$, au moyen d'un triangle arithmétique. — Triangle de Pascal, propriétés simples. — Puissance d'une imaginaire. — Somme des puissances semblables des premiers nombres entiers. — Examen des cas simples.

5. — Division algébrique, dans le cas où les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable. — Division exacte, impossibilité de cette opération en général, déduire de la marche des raisonnements la définition de la division avec reste. — Règle. — Cette opération n'est possible que d'une seule manière — Restes partiels. — Emploi de multiplicateurs constants pour obtenir des coefficients plus simples. — Propriétés diverses résultant de cette opération. — Indication de la méthode des coefficients indéterminés, — Exemples. — Division de deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes de la variable. — Mêmes questions que dans le cas précédent. — Montrer que si l'on ne s'astreint pas uniquement à l'emploi des exposants entiers et positifs les deux opératirons précédentes sont toujours possibles et en général illimitées. — Exemples divers. — Importance des opérations algébriques.

6. — Applications de la division algébrique. — Diviseurs communs à deux polynômes. — Recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers. — Forme des restes intermédiaires, du plus grand commun diviseur. — Propriétés relatives au plus grand commun diviseur. — Théorème d'Euler. — Condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes entiers aient un diviseur commun, d'un degré fixe. —

Plus petit commun multiple. — Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs polynômes entiers. — Théorème de Gauss. — Rapprochements qui existent entre cette théorie et la théorie analogue relative aux nombres entiers.

7. — Cas où le diviseur est de la forme $x - a$ ou $ax + b$. — Facteurs premiers d'un polynôme. — Divers théorèmes concernant le cas où les diviseurs employés sont de cette forme. — Identité formelle, identité fonctionnelle. — Il n'y a qu'une seule espèce d'identité dans le cas des polynômes entiers. — Un polynôme du n^e degré est bien déterminé quand on connaît les valeurs qu'il prend pour $n + 1$ valeurs de la variable. — Formule d'interpolation de Lagrange. — Idée de la racine multiple. — Un polynôme du n^e degré égalé à zéro, ne peut pas avoir plus de n racines. — Enoncé du théorème de D'Alembert. — Décomposition d'un polynôme en facteurs premiers — Unité du mode de décomposition. — Relations entre les coefficients et les racines. — Un polynôme P est défini au point de vue fonctionnel, quand on connaît toutes les racines de l'équation $P = 0$. — Diviseurs d'un polynôme entier. — Diviseur scommuns à deux ou plusieurs polynômes. — Multiples communs à deux ou plusieurs polynômes. — Quelques propriétés particulières aux polynômes à coefficients réels.

8. — Ce qu'on entend par *résoudre une équation*. — Trouver, d'une façon élémentaire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation du troisième degré, à coefficients réels, ait toutes ses racines réelles et distinctes. — Racine cubique d'une imaginaire. — Résolution et discussion de l'équation du troisième degré, à coefficients quelconques. — Exemples divers.

9. — Racine carrée d'un polynôme entier. — Racine cubique. — Racine n^e. — *Application :* mettre un polynône du quatrième degré sous la forme $aT^2 + bT_1$, T et T_1 désignant des trinômes du second degré. — En déduire la méthode de Ferrari pour la résolution d'une équation du quatrième degré. — Exemples et Exercices. — Équation bicarrée et équation reciproque du quatrième degré. — Exemples numériques, avec des coefficients réels ou imaginaires.

10. — *Fonctions* : mesure des longueurs. — Introduction de l'idée de limite. — Suites convergentes de longueurs rationnelles par rapport à l'unité, de nombres rationnels. — Rapport de deux longueurs. — Représentation des nombres réels par les segments d'une ligne droite, axe des nombres. — Propriétés simples des segments en ligne droite. — Intervalle. — Ensemble des nombres jouissant d'une propriété commune. — Variable indépendante réelle. — Fonction réelle. — Fonction finie. — Fonction infinie en un point. — Exemples numériques. — Continuité. — Exemples de fonctions continues. — Propriétés simples des polynômes entiers à coefficients réels, concernant la continuité. — Fonction continue dans un intervalle. — Deux définitions : identité des deux définitions. — Théorème de Cauchy, sur les fonctions continues. — Somme, produit, quotient de fonctions continues. — Continuité des polynômes entiers. — Fonction croissante, décroissante. — Maximum, minimum. — Axes de coordonnées. — Représentation graphique de la marche d'une fonction continue, sauf en des points isolés, où elle devient infinie. — Exemples numériques simples. — Valeurs indirectes en un point de disconti-

nuité polaire. — Appliquer les principes précèdents à l'étude des fonctions : $y=ax+b$, $y=\frac{1}{ax+b}$, $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$, $y=ax^2+2bx+c$, $y=\frac{1}{ax^2+2bx+c}$, $y=ax^4+2bx^2+c$, $y=\frac{1}{ax^4+2bx^2+c}$, $y=\frac{ax^2+2bx+c}{a'x^2+2b'x+c'}$. — Remarques suggèrées par ces études. — Idée de la dérivée. — Importance de cette idée. — Propriétés simples des fonctions finies dans un intervalle, ayant une dérivée. — Recherche directe de quelques dérivées. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse. — Nouvelle étude de la fraction rationnelle, à l'aide de la dérivée. — Étude des variations du polynôme du troisième degré, à coefficients réels. — Appliquer, sur chacun des exemples choisisl, es définitions et les idées fondamentales. — Théorèmes divers sur les maxima et minima.

Nota. — Tout ce qui est relatif à la mesure des longueurs et à la représentation géométrique des nombres réels pourra être placé au commencement de la Trigonométrie, si l'on préfère traiter cette partie du programme, avant ce qui précède. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Lemoine, à propos du problème traité par M. Lauvernay, dans le précédent numéro, une lettre fort intéressante que nous reproduisons ici :

Mon cher ami,

Le problème dont s'occupe M. Lauvernay, J. E. 1890, p. 265, a une histoire; ce qui suit en est le chapitre que je connais.

C'est le problème proposé en 1875 au Concours général de mathématiques élémentaires; M. *Aubert*, professeur au lycée de Rennes, en a donné la solution, en 1876, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 318. J'en ai indiqué une autre, très différente, avec une construction fort simple des centres des circonférences cherchées, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique 1880*, p. 513; j'y suis revenu, en le généralisant beaucoup, au *Congrès d'Oran de l'Association française en 1888*, p. 167; le problème reparaît dans *Mathesis* sous la forme de la question 679, 1890, p. 72, ainsi que le montre M. *Neuberg* (*Mathésis* 1890, p. 260). Enfin j'ai repris la question cette année au *Congrès de Limoges de l'Association française*. Je montre qu'elle

s'est très fréquemment présentée sous des formes variées et qu'elle a, par suite, une certaine importance dans la géométrie du triangle.

Dans mon travail du Congrès de Limoges, je donne un très grand nombre de formules, que je crois nouvelles, pour la plupart et qui s'obtiennent en exprimant les formules symétriques par rapport aux trois côtés a, b, c d'un triangle, en fonction du périmètre, p du rayon r du cercle inscrit et du rayon R du cercle circonscrit ; ainsi la quantité

$$a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)$$

que M. *Lauvernay* représente par T, pour abréger l'écriture, est égale à : $2r(4R+r)$. Cela conduit naturellement à des expressions un peu plus simples que celles qu'indique M. *Lauvernay*.

Le problème traité à Limoges comprend la solution du problème suivant : *Trouver les centres et les rayons des circonférences tangentes aux trois circonférences qui, dans le triangle* ABC, *ont respectivement pour centres* A, B, C *et pour rayons* a, b, c (circonférences que vous avez rencontrées, le premier, je crois), et de nombreuses autres questions.

Bien cordialement à vous. E. Lemoine.

M. Mosnat nous a adressé la lettre suivante dans laquelle il propose une solution très élégante de la question 32.

Voulez-vous me permettre, à mon tour, de vous envoyer une solution de la question 32, plus simple que celle qui a été donnée par *un abonné*, dans le dernier numéro du *Journal de Mathématiques élémentaires* (p. 281).

En appelant α, β, γ les coefficients de la seconde équation, la condition pour que les deux équations aient une racine commune peut s'écrire ainsi :

$$(-b\beta+2a\gamma+2c\alpha)^2=(b^2-4ac)(\beta^2-4\alpha\gamma),$$

et comme $\qquad -b\beta+2a\gamma+2c\alpha=0,$

il en résulte $b^2-4ac=0$, ou $\beta^2-4\alpha\gamma=0$,

ce qui démontre que l'une ou l'autre des équations données a ses racines égales.

BIBLIOGRAPHIE

Nous signalons, avec le plus grand plaisir, à l'attention des professeurs et à celle des candidats à l'École militaire de Saint-Cyr, les ouvrages suivants qui viennent de paraître à la librairie F. Alcan, 108, boulevard Saint-Germain.

1° **Cours d'Algèbre et applications de l'Algèbre à la Géométrie**, par M. Combette. — 1 vol. in-8°, avec fig. dans le texte : 10 fr.

2° **Cours de Cosmographie et de Topographie**, par MM. Combette et Porchon. — 1 vol. in-8°, avec figures dans le texte et 6 planches hors texte : 3 fr. 50.

3° **Cours de Géométrie descriptive**, par M. J. Caron. — 1 vol in-8° avec un atlas de 16 planches gravées sur cuivre, contenant 170 figures ou épures *(ligne droite et plan)* : 5 fr. — En cartonnage anglais : 6 fr.

Supplément à l'usage des candidats à l'École de Saint-Cyr, 1 volume in-8° avec atlas de 16 planches gravées sur cuivre, contenant 80 figures ou épures *(cônes, cylindres et sphères)* : 6 fr. — En cartonnage anglais : 7 fr.

On sait que le programme d'admission à l'École de Saint-Cyr a été notablement modifié au mois d'octobre dernier. On y a introduit des notions de Topographie et les commencements de la Géométrie analytique. J'ai lu, notamment, avec le plus vif plaisir, le Cours de Topographie que MM. Combette et Porchon offrent aux candidats à l'École militaire. J'y ai constaté les qualités d'exposition qui sont attachées à tous leurs ouvrages et j'y ai gagné d'apprendre une foule de choses intéressantes, desquelles j'étais, jusqu'à cette lecture, assez ignorant. Mais, après avoir loué ces ouvrages sans réserve, je ne puis m'empêcher de dire combien je trouve inopportune et fâcheuse cette transformation des programmes de l'École Militaire.

L'idée de la représentation du point et des lignes du second degré sous forme réduite, par la méthode cartésienne ; et la discussion, surtout sur des exemples numériques, des courbes qui correspondent à l'équation

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

toutes choses, si nous avons bonne mémoire, qu'on a faites de tout temps dans les cours d'Élémentaires, qui préparent à Saint-Cyr, suffisent largement, à notre avis, aux candidats à cette école, et nous n'avons guère compris l'utilité, pour eux, de ces notions générales de Géométrie analytique, telles que *la classification des lignes du second ordre; la réduction de l'équation générale des coniques ; la détermination des tangentes, des asymptotes, des points d'inflexion*, etc.

Nous comprenons encore moins l'idée qu'on a eue d'introduire, dans ce cours, un programme de topographie. Il nous avait toujours paru et la lecture que nous avons faite de l'excellent ouvrage que nous signalons à l'attention de nos lecteurs, élèves ou professeurs, a singulièrement confirmé chez nous cette opinion, que la topographie était, avant tout, une *science d'application*. Elle ne peut être comprise convenablement, si nous la jugeons bien, qu'à la condition de mettre entre les mains de ceux qui l'étudient les instruments dont elle fait usage ; il faudrait, en outre, con-

duire fréquemment les élèves sur le terrain pour leur apprendre leur maniement. Est-ce là ce que l'on veut? Assurément non. On sait très bien que, au minimum, trois mois de pratique contiuue seraient nécessaires pour former un élève médiocre en cette partie. Alors qu'arrivera-t-il? C'est que nos candidats, bon gré mal gré, apprendront par cœur les matières de leur programme de topographie et, pour la plupart, sans les comprendre très bien. Arrivés à Saint-Cyr, on peut être tranquille, il ne leur en restera aucune notion précise et tout sera à recommencer. Il eût peut-être mieux valu laisser le cours de topographie à l'école même; il était là à sa viaie place. Mais nous vivons à une époque où le progrès consiste à tout compliquer, à tout modifier, les changements opérés fussent-ils parfaitement mauvais. G. L.

QUESTION 322

Solution par M. B. Sollertinski, à Gatschina.

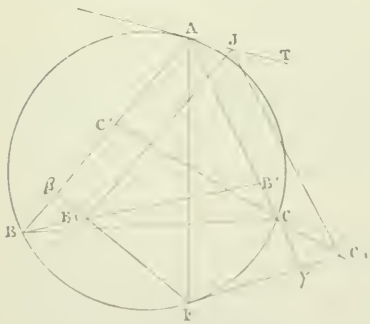
Soient F *le point où la symédiane issue de* A *du triangle* ABC *coupe le cercle circonscrit à ce triangle,* Fβ *et* Fγ *les perpendiculaires abaissées, de ce point, sur* AB *et sur* AC. *Si, par les sommets* B *et* C, *on mène deux antiparallèles quelconques* BB′ *et* CC′, *relativement à l'angle* BAC, *et si ces droites coupent respectivement* Fβ *et* Fγ *en* B_1 *et en* C_1; *la parallèle à* AB, *menée de* B_1, *et la parallèle à* AC, *menée de* C_1, *se coupent sur la tangente, en* A, *au cercle* ABC. (d'Ocagne.)

Puisque

$$\widehat{\beta F \gamma} = 2 - A = \widehat{BFC}, \tag{1}$$

on a, en retranchant la partie commune,

$$\widehat{\beta FB} = \widehat{\gamma FC}.$$



Les triangles semblables βFB, γFC donnent :

$$\frac{B\beta}{C\gamma} = \frac{F\beta}{F\gamma}.$$

Les triangles $BB_1\beta$, $CC_1\gamma$ sont rectangles et donnent

$$\frac{B\beta}{C\gamma} = \frac{B_1\beta}{C_1\gamma}.$$

Donc

$$\frac{B_1\beta}{C_1\gamma} = \frac{F\beta}{F\gamma}.$$

On conclut de là, que la parallèle à AB, menée par B_1 et la

parallèle à AC, menée par C_1, se coupent en J, sur la droite AF ou sur sa conjuguée harmonique. Mais, d'après (1), si l'un des points β, γ est sur BC, l'autre doit se trouver sur le prolongement de ce côté. Par suite, si l'un des points B_1, C_1 est dans l'angle BAC, l'autre est dans l'angle adjacent. Donc le point J ne peut se trouver sur AF; donc AJ est conjuguée harmonique de AF; c'est-à-dire que A est la tangente, en A, au cercle circonscrit.

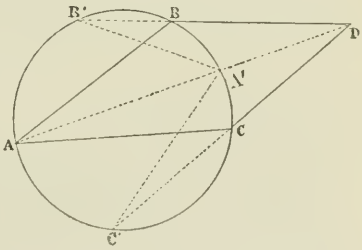
Remarque. — Dans ce qui précède, nous n'avons rien supposé quant à la position de la droite AF; la proposition énoncée est donc vérifiée si, au lieu de la symédiane AF, on prend une droite quelconque. Le point J est toujours sur la conjuguée harmonique de cette dernière droite.

QUESTION 339

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Soit ABDC *un parallélogramme quelconque, et soient* A′, B′, C′ *les seconds points de rencontre des droites* DA, DB, DC *avec la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Démontrer que la droite* A′D *est la moyenne géométrique, en grandeur et en position, des droites* A′C′, A′B′. (A. Gob.)

Les droites A′B′ et AB, AC et A′C′ étant antiparallèles, les triangles A′B′D et BAD, CDA et A′DC′ sont semblables. Dans le parallélogramme ABDC, les triangles CDA, BAD étant égaux, les triangles A′B′D, A′DC′ sont semblables. On a, par suite,



$$\frac{A'B'}{A'D} = \frac{A'D}{A'C'}.$$

D'après cela, A′D, qui appartient à la bissectrice de l'angle des droites A′B′ et A′C′ représente, en grandeur et *en position* (*), la moyenne géométrique des droites A′C′, A′B′.

(*) Cette expression nous paraît critiquable; pourquoi, *en position?*
G. L.

QUESTION 354

Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix.

On donne a *et* α_1; *puis on calcule* $\alpha_2\ \alpha_3, \ldots\ \alpha_n$, *par voie récurrente, au moyen de la formule*

$$a(n-1)\alpha_n = \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_1.$$

Démontrer que les nombres $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *forment une progression géométrique.* (G. L.)

Si l'ou suppose $n = 2$, on a

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2}{a}.$$

Si $n = 3$, $$2a\alpha_3 = 2\alpha_1\alpha_2$$

d'où $$\alpha_3 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{a} = \frac{\alpha_1^3}{a^2}.$$

Si $n = 4$, on a

$$3a\alpha_4 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_1 = \frac{3\alpha_1^4}{a^2},$$

d'où $$\alpha_4 = \frac{\alpha_1^4}{a^3}.$$

Ainsi, les valeurs α_1, α_2, α_3, α_4 forment la progression géométrique :

$$\alpha_1,\ \frac{\alpha_1^2}{a},\ \frac{\alpha_1^3}{a^2},\ \frac{\alpha_1^4}{a^3}.$$

Pour établir la proposition, nous supposerons que

$$\alpha_{n-1} = \frac{\alpha_1^{n-1}}{a^{n-2}},$$

et nous prouverons que $$\alpha_n = \frac{\alpha_1^n}{a^{n-1}}.$$

D'après la loi de récurrence, on a

$$a(n-1)\alpha_n = \frac{\alpha_1^n}{a^{n-2}} + \frac{\alpha_1^n}{a^{n-2}} + \ldots + \frac{\alpha_1^n}{a^{n-2}} = \frac{(n-1)\alpha_1^n}{a^{n-2}},$$

d'où $$\alpha_n = \frac{\alpha_1^n}{a^{n-1}}.$$

Nota. — Autre solution par M. B. Sollertinsky.

QUESTION 355

Solution par M. G. Tarry.

On donne deux droites rectangulaires Δ, Δ′ *se coupant en* O, *et un point fixe* P. *Par ce point* P, *on trace une droite mobile coupant* Δ, Δ′, *aux points* A, A. *Soit* Γ *la circonférence circonscrite au triangle* OAA′. *La droite qui joint le milieu* OA *au point qui, sur* Γ, *est diamétralement opposé au point* O, *coupe* Γ *en* J. *Trouver le lieu géométrique de ce point* J. *Ce lieu est une circonférence.*

(G. L.)

Le point A et le point milieu M de OA décrivent deux divisions homographiques, dont O est un point double.

La droite MI coupe Δ′ en un point B′, symétrique de A′ par rapport à O.

Par conséquent, A′ et B′ décrivent deux divisions homographiques dont O est un point double.

La droite AA′ passant par un point fixe, A et A′ décrivent, sur Δ et Δ′, deux divisions homographiques, dans lesquelles le point O se correspond.

Il résulte de là que les points M et B′ décrivent sur Δ et Δ′ deux divisions homographiques, dans lesquelles le point O se correspond.

Par conséquent, la droite MB′ passe par un point fixe Q.

Le point I est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite.

Donc le lieu du point I est la circonférence décrite sur OQ comme diamètre.

Nota. — Autre solution par M. Philastre.

M. B. Sollertinsky, dans la solution qu'il nous adresse, généralise la question et en déduit une solution de la question 365.

Voici cette généralisation, que nous laissons au lecteur le soin de vérifier.

Soit ABCD *un parallélogramme variable ayant un angle fixe* B *et dont la diagonale* AC *passe par un point fixe* P.

La circonférence Δ, *décrite sur l'autre diagonale* BD *et capable d'un angle donné* α, *rencontre la droite* DM, *divisant* BC *dans un rapport donné, en un point* J *dont le lieu est une circonférence.*

QUESTION 361

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Trouver la valeur, pour $x = 1$, *de la fraction :*

$$\frac{(x^m - 1)(x^n - 1) - mn(x - 1)^2}{(x - 1)^3}.$$

(Dellac.)

On a

$$x^m - 1 = [1 - (x - 1)]^m - 1 = m(x - 1) + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-1)^2 + \ldots$$

$$x^n - 1 = n(x - 1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-1)^2 + \ldots;$$

d'où résulte

$$(x^m - 1)(x^n - 1) = mn(x-1)^2 + \frac{mn(m+n-2)}{1.2}(x-1)^3 + \mathfrak{M}(x-1)^4;$$

et, par suite,

$$\frac{(x^m - 1)(x^n - 1) - mn(x-1)^2}{(x-1)^3} = \frac{mn(m+n-2)}{1.2} + \mathfrak{M}(x-1).$$

Donc, la valeur cherchée est

$$\frac{mn(m+n-2)}{1.2}.$$

On doit observer que cette démonstration exige la simple connaissance des trois premiers termes du développement de $(a + x)^m$, et l'on peut les obtenir, élémentairement, sans avoir recours à la formule du binôme.

On pourra démontrer, de la même manière, que *la valeur, pour* $x = 1$, *de l'expression*

$$\frac{(x^{p_1} - 1)(x^{p_2} - 1)\ldots(x^{p_n} - 1) - p_1 p_2 \ldots p_n (x-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$$

est

$$\frac{p_1 p_2 \ldots p_n (p_1 + p_2 + \ldots + p_n - n)}{1.2}.$$

En général, si l'on pose

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n - n = m, \quad p_1 p_2 \ldots p_n = b,$$

on a, pour $x = a$,

$$\left\{\frac{(x^{p_1} - a^{p_1})(x^{p_2} - a^{p_2})\ldots(x^{p_n} - a^{p_n}) - ba_m(x-a)^n}{(x-a)^{n+1}}\right\} = \frac{bma^{m-1}}{1.2}.$$

Note. — Autre solution par M. Pietro Marano, étudiant privé à Catane.

QUESTIONS PROPOSÉES

381. — 1° Exercice numérique. Simplifier la somme des fractions

$$(2n+1)\frac{2.3.4\ldots n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}},\qquad (2n-3)\frac{4.5\ldots n}{5.7\ldots\overline{2n-1}},$$

$$(2n-7)\frac{6.7\ldots n}{7.9\ldots\overline{2n-3}},\ \ldots,\ \text{pour } n=7, 8, 9, 10, \ldots\ (^*).$$

2° Théorème. *La somme des fractions considérées dans la question précédente, est* $\frac{n}{n+1}$ *ou* $\frac{n-1}{n+2}$, *suivant que* n *est pair ou impair.*

3° Théorème. *Soit* n *un nombre entier; soit* k *un nombre entier inférieur à* n. *On a*

$$\frac{1}{n-k}-\frac{k}{(n-k)(n-k+1)}+\frac{k(k-1)}{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}-\ldots$$
$$\pm\frac{k(k-1)\ldots 1}{(n-k)(n-k+1)\ldots n}=\frac{1}{n}.$$

(E. Catalan.)

382. — Si dans un triangle on considère les quatre cercles tangents aux trois côtés dont les centres sont o, o_a, o_b, o_c; et si g, g_a, g_b, g_c sont les quatre points de Gergonne de ces quatre cercles :

1° Les quatre droites og, o_ag_a, o_bg_b, o_cg_c se coupent au symétrique de l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit.

2° Si s, s_a, s_b, s_c, sont les points où ces quatre droites coupent une droite quelconque, le rapport anharmonique $\frac{ss_b}{ss_c}:\frac{s_as_b}{s_as_c}$ a pour valeur : $\frac{b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)}$.

(E. Lemoine.)

(*) Le dernier produit, en numérateur, est n ou $(n-1)n$, selon que n est *pair* ou *impair*.

383. — On considère deux circonférences Δ, Δ' telles que l'une d'entre elles, Δ', passe par le centre de Δ. Les tangentes communes à ces circonférences touchent Δ' aux points A, B. Démontrer que AB est tangente à Δ. *(G. L.)*

384. — Dans un triangle ABC, les perpendiculaires en B, C, à AB, AC rencontrent AC, AB en D, E. Démontrer que, si une parallèle quelconque à BC rencontre AB, AC en F, G, l'axe radical des circonférences BGD, CFE passe par A et par le centre de la circonférence ABC. *(Bernès.)*

385. — Dans l'angle A d'un triangle ABC et dans son opposé par le sommet, on trace deux droites DE, D'E' antiparallèles à BC et équidistantes de A. Faire voir que si M est la rencontre de BE et CD, et M' la rencontre de BE', CD', les droites AM, AM' sont conjuguées harmoniques relativement à la médiane et à la Sy-médiane issues de A, dans le triangle ABC. *(Bernès.)*

388. — DE étant une parallèle quelconque à BC entre AB et AC, F la rencontre des perpendiculaires à AC en E et à AB en B, et G la rencontre des perpendiculaire à AB en D et à AC en C, démontrer 1° que FG est perpendiculaire à la Symédiane issue de A; 2° que la distance du centre O de la circonférence ABC à la droite FG, comptée sur le diamètre AO, est égale au rayon du cercle ADE. *(Bernès.)*

387. — Quel est le plus petit nombre entier, premier avec

$$1, 2, 3, \ldots n?$$

(E. Catalan.)

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 28508-12-90.

APPLICATIONS

DE LA THÉORIE DU CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES

COORDONNÉES QUADRIPOLAIRES

Par M. **L. Bénezech.**

(*Suite et fin*, v. p. 3).

6. *Applications.* — 1° En introduisant dans l'équation (1) $V\Sigma\alpha_1 p_1 - \Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12} = 0$, la puissance P, du point courant M, par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre de référence, cette équation prend la forme très simple $\Sigma\alpha_1 p_1 + VP = 0$, car on a :

$$P = -\frac{\Sigma\alpha_1\alpha_2 d_{12}}{V^2}.$$

2° La puissance du centre de gravité d'un tétraèdre, par rapport à la sphère circonscrite, étant $-\frac{\Sigma d_{12}}{16}$; on a, en appelant GC la distance de ce point au centre de la sphère,

$$\overline{GC}^2 = R^2 - \frac{\Sigma d_{12}}{16}.$$

On trouverait, de même, la formule, $\overline{IC}^2 = R^2 - \frac{\Sigma s_1 s_2 d_{12}}{(\Sigma s_1)^2}$, I désignant le centre de la sphère inscrite et s_1, s_2... les aires des faces du tétraèdre.

3° Considérons le point $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ comme appartenant à la sphère déterminée par les points (M, A_2, A_3, A_4). On a, d'après l'équation $\Sigma\alpha_1 p_1 + VP = 0$,

$$\alpha_1 p_1' = -VP,$$

p_1' désignant la puissance du sommet A_1, relativement à la sphère $(MA_2A_3A_4)$.

De même, en considérant le point M comme appartenant, successivement, aux sphères (M, A_3, A_4, A_1), (M, A_4, A_1, A_2), (M, A_1, A_2, A_3), et en désignant par p_2'', p_3''', p_4^{IV}, les puissances

respectives des sommets A_2, A_3, A_4, par rapport à ces sphères, on trouve :

$$\frac{\alpha_1}{\frac{1}{p'_1}} = \frac{\alpha_2}{\frac{1}{p''_2}} = \frac{\alpha_3}{\frac{1}{p'''_3}} = \frac{\alpha_4}{\frac{1}{p^{\text{IV}}_4}} = \frac{V}{\frac{-1}{P}};$$

équations d'où l'on tire :

$$\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p''_2} + \frac{1}{p'_3} + \frac{1}{p^{\text{IV}}_4} + \frac{1}{P} = 0.$$

On énoncerait, sans difficulté, les théorèmes qui correspondent à ces relations.

Remarque. — Par une méthode identique, on trouvera aisément des résultats analogues pour la géométrie du triangle, En particulier, les formules correspondantes à celles qui sont mentionnées ci-dessus, résolvent immédiatement la question 373.

7. Sphère circonscrite au tétraèdre de référence. — 1° En supposant, dans la relation que nous avons donnée (*Application des déterminants à la Géométrie*, J. E., p. 220) entre les distances respectives de cinq points d'une sphère à quatre points quelconques de l'espace, que les points M_1, M_2, M_3, M_4 coïncident respectivement avec les points A_1, A_2, A_3, A_4, il vient, en désignant par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les coordonnées quadripolaires d'un point quelconque de la sphère,

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & 1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & 1 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & 1 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

équation cherchée.

En développant le déterminant du premier membre, par rapport aux éléments de la dernière ligne, on la met sous la forme

$$(1) \qquad \lambda_1^2 D_1 + \lambda_2^2 D_2 + \lambda_3^2 D_3 + \lambda_4^2 D_4 - D = 0.$$

Si l'on fait coïncider, successivement, le point $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ avec les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du tétraèdre de référence, l'équation (1) nous donne les identités :

$$0.D_1 + d_{12}.D_2 + d_{13}.D_3 + d_{14}.D_4 - D = 0,$$
$$d_{21}.D_1 + 0.D_2 + d_{23}.D_3 + d_{24}.D_4 - D = 0,$$
$$d_{31}.D_1 + d_{32}.D_2 + 0.D_3 + d_{34}.D_4 - D = 0,$$
$$d_{41}.D_1 + d_{42}.D_2 + d_{43}.D_3 + 0.D_4 - D = 0,$$

que nous avons déjà signalées (J. E., 1890, p. 212).

2° D'après ce qui a été dit plus haut, relativement à l'équation d'une sphère en coordonnées quadripolaires, on peut écrire immédiatement ainsi l'équation cherchée,

$$V\Sigma\alpha'_1\lambda_1^2 - \Sigma\alpha'_1\alpha'_2 d_{12} - V^2R^2 = 0,$$

ou bien, en observant que

$$\Sigma\alpha'_1\alpha'_2 d_{12} = V^2R^2,$$

(2) $$\Sigma\alpha'_1\lambda_1^2 - 2VR^2 = 0.$$

D'ailleurs, l'équation (2), eu égard aux relations :

$$\frac{\alpha'_1}{D_1} = \frac{\alpha'_2}{D_2} = \frac{\alpha'_3}{D_3} = \frac{\alpha'_4}{D_4} = \frac{2VR^2}{D},$$

se ramène à la forme trouvée précédemment.

8. — Plus généralement, proposons-nous de trouver l'*équation quadripolaire d'une sphère concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre de référence.*

Soit ρ le rayon de cette sphère. On sait que l'équation cherchée peut être écrite ainsi :

$$V\Sigma\alpha'_1\lambda_1^2 - \Sigma\alpha'_1\alpha'_2 d_{12} - V^2\rho^2 = 0,$$

ou

(3) $$\Sigma\alpha'_1\lambda_1^2 - V(R^2 + \rho^2) = 0.$$

Lorsque le tétraèdre de référence est régulier, cette équation devient

(4) $$\Sigma\lambda_1^2 - 4(R^2 + \rho^2) = 0.$$

De cette équation (4), on peut déduire certains théorèmes de géométrie; par exemple, les suivants :

1° La somme des carrés des distances d'un point quelconque de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier aux sommets du tétraèdre, est égale à huit fois le carré du rayon de la sphère.

2° Lorsque deux tétraèdres réguliers $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *sont inscrits, respectivement, à deux sphères concentriques; si l'on prend deux points quelconques* P, P′, *sur chacune de ces sphères, on a*

$$\overline{PA_1'}^2 + \overline{PA_2'}^2 + \overline{PA_3'}^2 + \overline{PA_4'}^2 = \overline{P'A_1}^2 + \overline{P'A_2}^2 + \overline{P'A_3}^2 + \overline{P'A_4}^2.$$

A propos de cette dernière proposition, voici le théorème général dont elle est un simple corollaire :

Lorsque deux polyèdres réguliers, d'un même nombre de sommets $A_1, A_2, \ldots A_n, A_1', A_2' \ldots A_n'$, *sont inscrits, respectivement, à deux sphères concentriques ; si l'on prend deux points quelconques* P, P', *sur chacune de ces sphères, on a la relation :*

$$\Sigma\overline{PA_1'}^2 = \Sigma\overline{P'A_1}^2.$$

En effet, le centre des moyennes distances de chacun des polyèdres coïncidant avec le centre des sphères, on a :

$$\Sigma\overline{PA_1'}^2 = n\rho'^2 + n\rho^2,$$

et

$$\Sigma\overline{P'A_1}^2 = n\rho^2 + n\rho'^2,$$

(ρ, ρ', rayons des deux sphères); d'où résulte le théorème énoncé.

LES PROGRÈS

DE LA GEOMÉTRIE DU TRIANGLE, EN 1890;

Par M. **E. Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 8.)

---

3. Éléments de Brocard. — Cette année, comme les précédentes, les questions qui se rapportent aux éléments de Brocard ont été très étudiées.

La boutade de M. Schlomilch (*Journal d'Hoffmann*, 1889), dans laquelle le géomètre allemand s'élevait contre les dénominations de point et angle de Brocard, est encore présente à l'esprit de tous, et nos lecteurs se rappellent aussi la brillante réponse de M. Morel (J. E. nov. 1889). M. Mansion a résumé (*Crelle ou Brocard*. M. 1890, pp. 28-30) les deux articles dont nous venons de parler. Sa note se termine ainsi :

« *Il n'y a plus à revenir sur ces dénominations trop universellement employées pour qu'on puisse les changer utilement. D'ailleurs le pût-on, il vaudrait mieux ne pas le faire. Crelle, dans sa longue carrière, a lui-même oublié son mémoire de 1816 et délaissé la géométrie. M. Brocard, au contraire, tout comme M. Lemoine, n'a cessé de travailler aux progrès de la géométrie récente, dans*

les rares loisirs que lui laissent ses labeurs professionnels. Il est juste que les noms de l'un et de l'autre restent indissolublement unis à la terminologie de cette partie de la science, comme l'a proposé M. Neuberg. »

Nous avons donné une analyse de l'ouvrage que Crelle a publié en 1816 (*Sur un ouvrage de Crelle*. J. E. 1890 pp. 32-35) et nous avons montré (*Le 176e porisme d'Euclide et ses conséquences*. J. E. 1890, pp. 83-86) comment, de la connaissance du 176e porisme d'Euclide, on peut déduire les propriétés les plus élémentaires du cercle, des points et de l'angle de Brocard. Une démonstration de ce porisme, plus simple que celle de Chasles, a été donnée par M. A. C. (*sur le 176e porisme d'Euclide*. M. 1890, p. 115). Une deuxième démonstration a été indiquée par M. Lauvenay (J. E. 1890, p. 151).

Parmi les théorèmes, fort nombreux, qui se rapportent aux éléments de Brocard, nous devons signaler le suivant (Lemoine, *loc. cit.*).

Si l'on joint les trois sommets d'un triangle ABC *à deux points inverses quelconques* ω_1 ω_2; *que par* ω_1, ω_2 *on mène les perpendiculaires respectivement*

à $A\omega_1$, $A\omega_2$ *se coupant en* I_a,
à $B\omega_1$, $B\omega_2$ — I_b,
à $C\omega_1$, $C\omega_2$ — I_c;

Les droites AI_a, BI_b, CI_c *se coupent en* I *sur le cercle circonscrit et la droite de Simson de* I *est perpendiculaire à la droite* $\omega_1\omega_2$. *Si* ω_1 *et* ω_2 *sont les points de Brocard,* I *est le point de Tarry.*

Cette proposition nous a été communiquée, simultanément, par MM. Lemoine et Tarry.

Dans une Note récente (*Quelques formules relatives aux triangles rectitignes; mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*. 1890, tome XLIV). M. Catalan a considéré les points et l'angle de Brocard et a évalué quelques distances. Soit ω l'angle de Brocard, Ω_1 et Ω_2 les points de Brocard, I le centre du cercle inscrit; on trouvera dans ce mémoire les formules suivantes :

$$\overline{O\Omega}^2 = \frac{R^2}{n^4}(a^4 + b^4 + c^4 - n^4) = R^2 - B\Omega_1 . C\Omega_2.$$

$$\Omega_1\Omega_2 = \frac{abc}{n^4}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - n^4} = O\Omega_1 \frac{4m^2}{n^2},$$

$$\overline{I\Omega_1}^2 = \frac{2Rr}{n^4}\left[a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)\right],$$

$$\overline{I\Omega_1}^2 + \overline{I\Omega_2}^2 = 8\frac{Rr^2}{n^4}\left[(2R-r)p^2 - r(4R+r)^2\right];$$

en posant

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad n^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \qquad 2p = a + b + c.$$

Enfin M. Catalan résout le problème suivant

Les droites AM, BM, CM *rencontrent en* U, V, W *les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC. *Déterminer 1° les longueurs* x, y, z *des droites* AU, BV, CW ; *2° les distances* AM = u, BM = v, CM = w.

M. Catalan après avoir posé BU = a', CU = a'', ... trouve

$$x^2 = \frac{c^2a'' + b^2a' - aa'a''}{a},$$

avec des expressions analogues pour y^2 et z^2; puis

$$\frac{u}{\sin\beta''} = \frac{v}{\sin\alpha'} = \frac{w}{\sin(\alpha' + \beta'')},$$

$$u = \frac{ab''x}{ab'' + a'b'}, \qquad v = \frac{bc''y}{bc'' + b'c}, \qquad w = \frac{ca''z}{ca'' + c'a'}.$$

α', α'', β', β'', γ', γ'' *désignant respectivement les longueurs* AW, AV, BU, BW, CV, CU.

Nous devons signaler aussi deux Mémoires, dus à M. A. Müller, insérés dans les Archives de Grunert-Hoppe (1890) :

1° *Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittschaaren* (26 pages) ;

2° *Ueber Kegelschnitte die zu dem verallgemeinerten Brocard'schen Dreiecke in Beziehung stehen* (44 pages).

4. Foyers de Steiner. — MM. Neuberg et Gob (*sur les foyers de Steiner d'un triangle.* A. F. *Paris* 1889, pp. 179-196) appellent *foyers de Steiner*, dans un triangle, les foyers de l'ellipse qui touche les côtés en leurs milieux. Ils ont donné de ces points un grand nombre de propriétés dont voici les principales :

1° Si l'on transforme un triangle par polaires réciproques, en prenant pour centre du cercle directeur le point de Lemoine K, *ce point sera un foyer du triangle transformé* (Proposition due à M. Hadamard J. S. 1885, p. 41).

2. Si F *est un foyer d'une conique touchant les côtés du triangle* ABC *aux points* A', B', C' *les droites* FA', FB', FC' *seront les isogonales des droites* FA, FB, FC *par rapport aux angles* BFC, CFA, AFB. *Donc, si* F *est un foyer de Steiner du triangle* ABC, *les droites* AF, BF, CF *sont les symédianes des triangles* BFC CFA, AFB.

3. Les foyers de Steiner d'un triangle sont les points de Lemoine de leurs triangles podaires.

4. Le centre de gravité G *d'un triangle est un foyer de Steiner de son triangle podaire.*

5. Les droites joignant les sommets d'un triangle à un foyer de Steiner sont inversement proportionnelles aux sinus des angles sous lesquels on voit de ce foyer les côtés opposés de ABC.

6. K *étant le point de Lemoine d'un triangle* ABC *et* O, O_a, O_b, O_c *étant les centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC, KBC, KCA, KAB *les points* O *et* K *sont les foyers de Steiner du triangle* $O_a O_b O_c$. *Les quadrilatères* OBO_aC, OCO_bA, OAO_cB *sont équivalents.*

7. Soient K_1, A′ *les points de rencontre de la symédiane* AK *avec les circonférences* ABC, KBC : K_1 *est un foyer de Steiner du triangle* A′BC.

8. H *étant l'orthocentre du triangle* ABC, *on prend sur* HA, HB, HC *les longueurs* HA′, HB′, HC′ *égales aux hauteurs correspondantes :* H *est un foyer de Steiner du triangle* A′B′C′.

9. Soit Ω *le point de Brocard de* ABC *tel que* ΩAB = ΩBC = ΩCA. *On mène les droites* ΩM, ΩN, ΩP *parallèles à* BC, CA, AB *et terminées en* M, N, P *à* CA, AB, BC *:* Ω *est un foyer de Steiner de* MNP.

10. Le centre de gravité d'un triangle ABC *est un foyer de Steiner du second triangle de Brocard* $A_2B_2C_2$.

11. Soient A′B′C′ *le triangle podaire de* ABC *par rapport au point de Lemoine* K, ω *et* ω′ *les angles de Brocard des triangles* ABC, A′B′C′ *: l'angle* ω′ *dépend uniquement de* ω.

MM. Neuberg et Gob ont donné aussi plusieurs propositions se rapportant aux *Angles de Steiner*. Ils appellent ainsi les moitiés des angles, aux sommets, de deux triangles isoscèles équibrocardiens avec le triangle donné. Le plus petit de ces angles est le *premier angle de Steiner*, l'autre est le *second angle de Steiner*.

5. Axes de Steiner et Hyperbole de Kiepert. — La droite qui joint les foyers de Steiner, et celle qui est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points, sont les axes de l'ellipse maxima inscrite au triangle et aussi ceux de son anti-complémentaire : l'ellipse de Steiner. Pour ce motif MM. Neuberg et Gob (*Sur les axes de Steiner et l'hyperbole de Kiepert*. A. F. *Paris*, 1889, pp. 166-179) ont appelé ces droites *Axes de Steiner*. Les axes de l'hyperbole de Kiepert étant parallèles aux axes de Steiner, l'étude de ces derniers devait entraîner une étude de la conique de Kiepert; c'est ce qu'ont fait MM. Neuberg et Gob. Après avoir donné, pour plus de clarté, de nouvelles démonstrations de propositions déjà connues, MM. Neuberg et Gob ont fait connaître de nombreuses propriétés des axes de Steiner et de l'hyperbole de Kiepert. Voici les plus importantes :

1. Les axes de Steiner sont les droites joignant le centre de gravité G *aux points de rencontre de la circonférence ayant pour diamètre* GH (H étant l'orthocentre) *avec la droite joignant le point de Lemoine* K *au milieu de* GH.

Si l'on remplace H *par tout autre point de l'hyperbole de Kiepert, on a le théorème suivant :*

2. Une sécante quelconque, menée par le centre Q *de l'hyperbole de Kiepert, rencontre les axes de Steiner en deux points par lesquels on mène des parallèles à ces axes ; le point de rencontre de ces parallèles décrit l'hyperbole de Kiepert.*

3. Soient m_a, m_b, m_c, *les intersections des côtés homologues du triangle complémentaire* A'B'C' *et du triangle orthocentrique* $h_a h_b h_c$ *d'un triangle donné* ABC. *Par ces points on peut faire passer une infinité de triangles* $p_a p_b p_c$ *inscrits à* ABC *et perspectifs avec* ABC *: le lieu des centres de perspective est l'hyperbole de Kiepert.*

4. Les côtés du triangle $m_a m_b m_c$ *touchent l'hyperbole de Kiepert en* A, B, C ; *l'orthocentre de* $m_a m_b m_c$ *coïncide avec le centre du cercle des neuf points de* ABC ; *les droites* Am_a, Bm_b, Cm_c *sont perpendiculaires à* GH.

5. Les axes de Steiner sont parallèles aux droites de Simson des extrémités du diamètre OK *de la circonférence* ABC.

6. Etant données deux ellipses concentriques et homothétiques, la normale en un point M *de l'ellipse intérieure coupe les axes aux points* P, Q, *et la tangente en* M *rencontre l'ellipse extérieure en* R, S *: les angles* RPS, RQS *sont constants.*

7. Le lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle donné, et dont les axes ont des directions données est une hyperbole équilatère transformée par points inverses et par points anticomplémentaires, d'un diamètre de la circonférence circonscrite au triangle.

La proposition (6) donne la notion généralisée de l'angle de Steiner.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR UN PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (A)

Par M. **Humbert**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Algèbre *(suite)*.

10. — Progressions arithmétiques. — Définition des progressions arithmétiques illimitées et limitées. — Raison. — Premier terme d'une progression arithmétique limitée. — Terme de rang n. — Terme situé n rangs avant celui que l'on choisit comme point de départ. — Termes équidistants des extrêmes. — Somme des termes d'une progression arithmétique

limitée. — Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique limitée. — Fonctions symétriques simples de ces termes. — Moyens arithmétiques insérés entre deux nombres donnés. — Nombres qui font partie ou qui ne font pas partie d'une même progression arithmétique avec deux nombres donnés a et b. — Représentation d'un nombre qui n'est pas moyen arithmétique par des suites convergentes de moyens arithmétiques. — Progressions géométriques. — Questions analogues. — Aperçu sur les progressions envisagées comme des suites infinies. — Séries. — Séries convergentes, divergentes. — Application aux progressions. — Condition nécessaire de convergence. — Comparaison des séries aux progressions géométriques; en déduire les deux règles simples de convergence. — Exemples divers.

11. — Radicaux arithmétiques. — Généralisation de l'idée d'exposant. — Étude complète de l'exponentielle à base positive et à exposant réel. — Définition des logarithmes au moyen des progressions arithmétiques et géométriques. — Logarithme d'un nombre quelconque. — Base d'un système de logarithmes. — Le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance de la base égale à un nombre. — Propriétés des logarithmes. — Passage d'un système de logarithmes à un autre. — module. — Progressions de Néper. — Introduction du nombre e. — Propriétés de la fonction logarithmique.

Trigonométrie.

12. — Arcs positifs, arcs négatifs. — Arcs limités par deux points, arcs équivalents. — Relation entre les arcs déterminés par trois ou plusieurs points situés sur une circonférence. — Moyen simple d'évaluer l'arc compris entre deux points d'un groupe, ou l'angle formé par deux droites d'un faisceau. — Circonférence trigonométrique, diverses unités d'arcs. — Projections sur un axe. — Théorème des projections. Définition du sinus et du cosinus. — Formules évidentes. — Angle de deux directions positives. Projection orthogonale d'un segment, application à un contour polygonal. — Formules fondamentales, $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. — Fonctions trigonométriques. — Représentation géométrique des fonctions trigonométriques ou circulaires. — Variations des fonctions circulaires. — Courbes représentatives. — Périodicité des fonctions circulaires. — Valeurs indirectes de ces fonctions, en leurs points de discontinuité. — Arcs ayant un sinus donné, un cosinus donné, une tangente donnée. — Fonctions circulaires inverses. — Remarques sur les fonctions inverses et les équations $\sin y = x$, $\cos y = x$, $\operatorname{tg} y = x$. — Arcs équivalents. — Arcs complémentaires. — Arcs supplémentaires. — Arcs dont la somme est $\frac{3\pi}{2}$. — Arcs dont la différence est $\frac{\pi}{2}$, π, ou $\frac{3\pi}{2}$. — Tableau de formules dans chaque cas. — Ramener un arc au premier quadrant. — Calculer les lignes trigonométriques en fonction de l'une d'elles, discussion dans chaque cas. — Calcul des lignes trigonométriques de quelques arcs.

13. — Addition des arcs, formules relatives à l'addition des arcs. — Cas de deux, de trois, de n arcs. — Problème général de l'addition des arcs. Exemples particuliers. — Discussion géométrique et analytique dans chaque cas. — Multiplication des arcs, formules relatives à la multiplication des

arcs. — Cas de deux, de trois, de n arcs. — Problème général de la multiplication des arcs. — Exemples particuliers, discussion analytique et géométrique dans chaque cas. — Division des arcs, problème général de la division des arcs, trois cas. — Division par deux et par trois. — Étude complète de ces deux cas. — Résolution trigonométrique complète de l'équation du troisième degré, à coefficients réels.

14. — Construction des tables. — Inégalités : $\sin x < x < \operatorname{tg} x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. — Limite de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0$. — Notions premières sur les infiniment petits. — Démontrer les inégalités $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$, $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$. — Limites entre lesquelles est compris le sinus ou le cosinus d'un petit arc. — Sin 10″ et cos 10″, formules de Simpson, vérification et simplification des calculs — Disposition et usage des tables.

15. — Transformations logarithmiques, $\sin p \pm \sin q$, $\cos p \pm \cos q$, rapports de ces sommes. — Transformer $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b$, $\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b$, $\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg}$ ou a, $\operatorname{cotg} a - \operatorname{tg} a$, $1 \pm \cos a$, $\sin a \pm \cos a$, etc. — Rendre logarithmiques les expressions $a \pm b$, $\frac{a \pm b}{c \pm d}$. — Même question pour les racines d'une équation du second degré ou du troisième degré et pour certaines expressions particulières. — Identités trigonométriques, absolues ou conditionnelles. — Relation qui existe entre les cosinus de trois arcs a, b, c tels que l'ont ait $a = b + c$, ou $a + b + c = \pi$. — Transformation logarithmique de ces relations et de $\sin a + \sin b + \sin c$, $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c$, pour $a + b + c = \pi$. — Autres exemples. — Somme des sinus de n arcs en progression arithmétique, somme des cosinus. — Sommes des carrés ou des cubes pour les sinus et pour les cosinus.

16. — Equat'ons trigonométriques, distinction entre une équation trigonométrique et une identité trigonométrique. — Résolution et discussion complètes de diverses équations trigonométriques, de divers systèmes d'équations trigonométriques. — Continuité des fonctions circulaires directes et inverses. — Dérivées de ces fonctions. — Applications simples.

17. — Triangles. — Formules relatives aux triangles rectangles. — Formules relatives aux triangles quelconques. — Étudier les systèmes de formules au point de vue de l'équivalence algébrique, complète ou non. — Formules donnant le rayon du cercle inscrit et les rayons des cercles ex-inscrits. — Rayon du cercle circonscrit. — Formules relatives à l'aire du triangle. — Bissectrices, médianes, hauteurs, etc. — Coordonnées trilinéaires des points remarquables.

18. — Résolution des triangles rectangles. — Résolution des triangles quelconques. — Problèmes variés sur la résolution des triangles. — Quadrilatère quelconque. — Quadrilatère inscrit. — Quadrilatères circonscrits. — Application de la trigonométrie au lever des plans.

19. — Représentation géométrique de l'imaginaire. — Forme trigonométrique de l'imaginaire, module, argument. — Addition des imaginaires. — Théorème relatif aux modules, démonstration géométrique, démonstra-

tion analytique. — Équation de la ligne droite, en coordonnées rectangulaires. — Produit de deux, de plusieurs imaginaires. — Quotient de deux imaginaires. — Puissance d'une imaginaire. — Formule de Moivre. — Racine m^e d'une imaginaire, représentation géométrique du système des racines. — Comparaison de ce système de racines au système des racines m^{es} de l'unité.

20. — Formules relatives à l'addition des arcs, à la multiplication des arcs. — Division des arcs, résolution de quelques problèmes particuliers pouvant donner une idée exacte et complète des cas généraux. — Introduction des fonctions de φ, $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $v = \cos\varphi - i\sin\varphi$. — Usage de ces fonctions.

(A suivre.)

DES COORDONNÉES ANGULAIRES

Solution des questions 282, 284, 285, 292, 293, 296 (*), par M. Lormeau, étudiant à la Faculté des Sciences d'Angers.

---

1. — Étudions d'abord les angles *surlatéraux* de M, c'est-à-dire les angles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, sous lesquels on voit, de M, les côtés du triangle. Nous les regarderons comme inférieurs à 180°, et de même signe que les coordonnées normales correspondantes.

M détermine trois cercles latéraux, c'est-à-dire des cercles circonscrits aux trois triangles MBC,... Le cercle MBC a toujours un de ses deux arcs BC capable de l'angle $\mathfrak{X}$.

2. — *Le cercle* MBC *a pour équation, en coordonnées surlatérales* (question 284), $\mathfrak{X}_1$ *désignant l'angle* BMC

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\mathfrak{X} = \operatorname{tg}\mathfrak{X}_1.$$

Car, soit par exemple, $\mathfrak{X}_1$ positif. L'équation a pour solutions

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1, \qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 - 180^\circ = -(180 - \mathfrak{X}_1);$$

ce qui donne les points au-dessus et au-dessous de BC.

(*) M. Lormeau, à notre demande, a bien voulu fondre la résolution de ces questions proposées l'an dernier dans le *Journal de Mathématiques spéciales* dans un article unique ; il y a seulement ajouté quelques énoncés complémentaires, très intéressants, que M. Poulain lui a fournis. On trouvera les énoncés de ces questions, inutiles à la lecture du présent article à l'endroit cité. Elles comportent, comme on va le voir, des solutions élémentaires qui sont ici mieux à leur place. G. L.

3. — *Pour définir un point* M, *on ne peut pas se donner plus de deux coordonnées.* Car si l'on se donne $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$, le point M doit être situé sur deux cercles latéraux, ce qui ne permet pas de se donner abitrairement $\mathcal{X}_1$. Les coordonnées normales absolues jouissent de la même propriété. Mais ici il y a une particularité nouvelle et gênante. C'est que si l'on se donne deux coordonnées, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Z}_1$, il n'y a pas toujours un point qui leur réponde *sans modification.* Car les deux cercles latéraux peuvent se couper de manière à remplacer l'un au moins des angles par un autre qui, en valeur absolue, est son supplément (*).

De là la nécessité de distinguer entre les *valeurs proposées* pour ces coordonnées et les *valeurs réalisées.* Voici toutefois un autre moyen d'éviter, du moins en apparence, l'ambiguïté.

4. Théorème. — *Quand un point est défini, non plus par* $\mathcal{Y}$ *et* $\mathcal{Z}$, *mais par leurs tangentes, il y a toujours un point* M *répondant à ces valeurs et il n'y en a qu'un, si* M *n'est pas sur le cercle circonscrit à* ABC.

En effet, d'après (**2**), se donner ces tangentes, c'est se donner deux cercles latéraux.

Cet énoncé suggère l'idée de prendre comme coordonnées, non les angles, mais leurs tangentes ou cotangentes; mais l'esprit se porte plus directement sur les angles; puis, les autres lignes trigonométriques s'introduisent nécessairement dans les formules.

5. — Pour passer de ces valeurs ambiguës des angles aux valeurs réalisées, il faut chercher la situation de M, si elle n'est pas connue d'avance (voir **17**). On peut cependant écarter *à priori* tout système de valeurs dont la somme égale $\pm 180^\circ$ (**6**).

6. — *Entre les trois angles réalisés on a la relation*

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} + \mathcal{Z} = 360^\circ, \tag{2}$$

si M *est intérieur à* ABC; *sinon*

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} + \mathcal{Z} = 0. \tag{3}$$

(*) On peut l'appeler le *supplément changé de signe;* c'est $\mathcal{X} \pm 180^\circ$, suivant que $\mathcal{X}$ est positif ou négatif.

La première relation est évidente. La seconde se déduit de ce que, hors de ABC, un angle égale toujours la somme des deux autres, si l'on fait abstraction des signes.

7. — Ces relations permettent de calculer le troisième angle $\mathfrak{X}$ quand on connaît les valeurs *réalisées* des deux autres, ce qui est rare, à cause des expressions compliquées de leurs tangentes. Il suffit alors de choisir celle des deux relations qui donne pour $\mathfrak{X}$ une valeur absolue plus petite que 180°. Cela n'arrive que pour l'une d'elles.

Dans le cas plus fréquent des valeurs *proposées* pour $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$, c'est-à-dire, *quand on ne connaît que les tangentes de ces angles, on obtient également* $\mathfrak{X}$ *par la formule* :

(4) $$\operatorname{tang} \mathfrak{X} = - \operatorname{tang} (\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}), \text{ (q. 284).}$$

En effet, pour le cas des angles réalisés, c'est la conséquence des relations (2) et de (3). Quant aux autres, ils ne diffèrent de ceux-ci que par *un multiple de* π, puisqu'ils ont même tangente. Or, si l'on effectue ce changement dans (4), la valeur de l'inconnue ne change pas.

8. — En géométrie, on constate toujours que les formules sont générales quand les grandeurs ne changent de signe qu'en passant par zéro ou l'infini. Les formules sont rarement générales dans le cas contraire. Or 1° les angles $\mathfrak{X}$... sont des grandeurs discontinues qui passent de + 180° à − 180°. On doit donc s'attendre à ce que les formules telles que (2), où ces angles entrent sans signes trigonométriques, ne s'appliquent pas au plan tout entier; 2° le contraire arrive pour les formules renfermant les lignes trigonométriques des angles et de leurs multiples; 3° mais il n'en est pas de même de certaines lignes trigonométriques des sous-multiples. Par exemple, le sinus de $1/2\,\mathfrak{X}$ saute de + 1 à − 1, quand M traverse le segment BC. On doit donc s'attendre à n'avoir alors de formules générales que si on laisse ambigu le signe de *sin* $1/2\,\mathfrak{X}$.

9. — Nous avons maintenant à exprimer $\mathfrak{X}$, ... en fonction des différentes espèces de coordonnées, et réciproquement

(q. 282). Nous représenterons par P la puissance de M par rapport au cercle circonscrit.

10. Théorème fondamental. — *L'angle* $\mathfrak{X}$ *est donné, en fonction de* α, β, γ, *par les formules équivalentes, où* $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$,

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{cotg} \mathfrak{X} = \operatorname{cotg} A - \frac{\Sigma a^2 \beta\gamma}{2S\sigma\alpha},$$

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{cotg}(A - \mathfrak{X}) = \operatorname{cotg} A - \frac{bc\sigma\alpha}{\sin A\, \Sigma a^2 \beta\gamma}.$$

Si l'on passe aux coordonnées absolues, ces formules deviennent :

$$\text{(7)} \qquad P = 2\alpha_1(\operatorname{cotg} \mathfrak{X} - \operatorname{cotg} A),$$

$$\text{(8)} \qquad P = \frac{2\alpha_1}{\sin^2 A[\operatorname{cotg}(A - \mathfrak{X}) - \operatorname{cotg} A]}.$$

A cause de ces équivalences, il suffit d'établir (7). Pour cela, calculons P. Prolongeons BM jusqu'au cercle circonscrit en D. Soit, par exemple, M intérieur au cercle. La puissance est $P = -BM.MD$. Or, dans le triangle MDC,

$$\frac{MD}{MC} = \frac{\sin(\mathfrak{X} - A)}{\sin A} = \sin \mathfrak{X} (\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} \mathfrak{X}).$$

Si dans l'expression de P, on remplace MD par cette valeur on trouve (7).

De là, on tire (5) en remplaçant P par $-\frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{\sigma^2}$ (J. S. 1889, p. 7) et α_1 par $\frac{\alpha S}{\sigma}$ (*).

11. Corollaire I. — *Inversement* α, β, γ *sont donnés en fonction de* $\mathfrak{X}$. ... *par les formules :*

$$\text{(9)} \quad \alpha(\operatorname{cotg} \mathfrak{X} - \operatorname{cotg} A) = \beta(\operatorname{cotg} \mathfrak{Y} - \operatorname{cotg} B) = \ldots = -\frac{\Sigma a^2\beta\gamma}{2S\sigma},$$

$$\text{(10)} \quad \frac{\alpha}{a^2[\operatorname{cotg}(A - \mathfrak{X}) - \operatorname{cotg} A)} = \ldots = -\frac{2S\Sigma a^2\beta\gamma}{a^2b^2c^2\sigma}.$$

12. Corollaire II. — *Pour l'angle* $\mathfrak{X}'$ *du point inverse de* M,

(*) La Géométrie Cartésienne conduit à une forme différente (voir Boutin, J. E. 1888, p. 281 et 1889, p. 74). Mais on la ramène à celle-ci, en exprimant l'x du numérateur, en fonction de y et z.

on a

(11) $$\operatorname{tang} \mathfrak{X}' = \operatorname{tang} (A - \mathfrak{X}).$$

Il suffit d'appliquer (9) à l'inverse et de comparer à (10). Si on veut $\mathfrak{X}'$ lui-même, il s'agit de calculer sa valeur réalisée (5).

13. Corollaire III. — *Le cercle latéral* MBC *a* (5) *et* (6) *pour équations* (q. 282). Car, soit $\mathfrak{X}$ positif. L'équation exprime que, du point mobile M, on voit BC sous l'un des angles $\mathfrak{X}$, — $(180^\circ - \mathfrak{X})$.

14. — *Les coordonnées tripolaires* (q. 282) se déduisent de α,... par les formules équivalentes

(12) $$\frac{\lambda\alpha_1}{\sin \mathfrak{X}} = \frac{\mu\beta_1}{\sin \mathfrak{Y}} = \frac{\nu\gamma_1}{\sin \mathfrak{Z}} = \frac{\lambda\mu\nu}{2},$$

(13) $$\frac{\lambda a}{\sin (A - \mathfrak{X})} = \frac{\mu b}{\sin (B - \mathfrak{Y})} = \frac{\nu c}{\sin (C - \mathfrak{Z})} = \frac{2\lambda\mu\nu R}{P}$$

En effet, le triangle MBC a pour aire, même en supposant α_1 négatif,

(14) $$\alpha_1 = \frac{\mu\nu}{2} \sin \mathfrak{X}.$$

On en tire (12) et de là on passe à (13), au moyen de (9).

15. Corollaire. — Les trois angles $A - \mathfrak{X}$,... ont leur sinus de même signe ; c'est le signe de P.

16. — Inversement on peut obtenir les sinus, cosinus et cotangente de $\mathfrak{X}$ en fonction de λ, μ, ν (q. 282). Le triangle MBC donne le sinus par la relation (14) ; le cosinus et la cotangente par

(15) $$a^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu \cos \mathfrak{X}, \quad a^2 = \mu^2 + \nu^2 - 4\alpha_1 \operatorname{cotg} \mathfrak{X}.$$

Au lieu d'éliminer α_1 dans ces formules, on peut au contraire éliminer μ, ν (J. S. 1889. p. 130).

17. *Situation de* M. — Les formules (9) permettent d'indiquer la position de M, quand il est donné seulement par les tangentes de $\mathfrak{X}$,... (5). 1° Les signes de α, β, γ décident si AM,... coupent intérieurement le triangle ABC. Pour obtenir ces signes, on peut éviter d'évaluer tang $\mathfrak{X}$,... si on connaît les angles positifs $\mathfrak{X}_0$,... qui admettent ces tangentes. Ces angles

dont nous allons voir l'importance peuvent être appelés angles *réduits*, ce qui veut dire : réduits aux deux premiers quadrants positifs.

Or, si AM coupe intérieurement ABC, les expressions $\cot g\,\mathcal{Y} - \cot g\,B$ et $\cot g\,\mathcal{Z} - \cot g\,C$ doivent être de même signe; on en déduit facilement que $\mathcal{Y}_0 - B$ et $\mathcal{Z}_0 - C$ sont de même signe. La vérification est des plus simples.

2° Si l'on trouve que AM coupe intérieurement, et que le contraire a lieu pour BM, CM, il s'agit de décider pour M entre deux régions. Or, il est clair que si M est dans l'angle tronqué A, on a $\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Z}_0 < 180°$. Tandis que s'il est dans l'angle opposé à A par le sommet, le calcul du premier membre mène à l'inégalité contraire (voir la Note de la p. 192, J. S. 1890).

18. — Il est facile de trouver à l'aide de cette règle les énoncés sur les centres isogones (q. 292, p. 192). Il suit de là qu'on ne doit plus définir ces points par la condition de *réaliser* trois angles égaux, mais d'avoir trois angles ayant *la même tangente*. La relation (4) développée donne alors $\operatorname{tg}\mathcal{X} = \pm\sqrt{3}$.

19. — Pour compléter la règle (**17**), qui donne la situation de M, M. Poulain nous communique les trois théorèmes suivants. Ils donnent parfois le résultat très rapidement.

Théorème I. — $\mathcal{X}_0, \ldots$ *étant les angles réduits de* M (**17**), *les régions du plan pour lesquelles on a*

$$\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Z}_0 > 180° \tag{16}$$

sont formées par l'intérieur du triangle et les trois angles opposés par les sommets à A, B, C.

On le prouve en exprimant, dans chaque région, qu'un angle en M est positif, ou on le compare soit à A, soit à 180°.

20. — *On peut encore caractériser cette région par l'égalité* $\Sigma\,\mathcal{X}_0 = 360°$, *et l'autre par* $\Sigma\,\mathcal{X}_0 = 180°$.

21. Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit situé dans l'angle opposé par le sommet à* A *est*

$$\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Z}_0 > 360° - A. \tag{17}$$

Même méthode, sauf pour les angles tronqués, où l'on se sert du théorème précédent.

22. Théorème III. — Plus généralement, *1° φ étant un angle positif plus petit que* 180°, *les régions du plan pour lesquelles on a*

$$\mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Z}_0 > \varphi, \tag{18}$$

se composent d'abord de l'intérieur de triangle et des angles opposés par les sommets à A, B, C, *puis d'une des deux parties déterminées, dans les angles tronqués, par le cercle correspondant à* $\mathfrak{X} = 180° - \varphi$ (*) ; *2° pour* $\varphi > 180°$ *la région est formée seulement par la partie de l'angle* A *et de son opposé par le sommet, qui est au-dessus du cercle.*

23. Corollaire. — *Lorsque l'inégalité* (18) *se transforme en égalité, le point* M *vient sur le cercle, mais seulement sur les arcs qui séparent les différentes régions du réseau relatif à* φ.

24. *(Points jumeaux).* — *Si on remplace les trois cercles latéraux d'un point* M *par leurs symétriques pris par rapport aux côtés correspondants, les nouveaux cercles se coupent encore en un même point* M_1 (q. 285, p. 119).

Cet énoncé a été donné pour la première fois par M. Van den Berg (M. 1882, p. 226). Il se démontre aisément au moyen des relations (2) et (3) (ibid.); mais pour être rigoureux, il faut passer en revue les trois sortes de régions que M peut occuper. Si nous changeons les signes de $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{X}$, il y a un point M_1 répondant aux nouvelles tangentes. Si l'on calcule sa troisième tangente, on voit qu'elle s'obtient aussi en changeant le signe de $\mathfrak{X}$. Or, les cercles latéraux d'un tel point sont les symétriques des anciens. Ceux-ci passent donc par un même point.

25. — Les points M et M_1 ont été appelés *points jumeaux* par M. Artzt, qui toutefois les définissait d'après une propriété de leurs triangles antipodaires.

(*) Comme dans tous les réseaux, les cases de même espèce communiquent par leurs sommets.

26. — Il suit de ce qui précède que, pour le jumeau de M,

(19) $$\operatorname{tg} \mathfrak{X}_1 = -\operatorname{tg} \mathfrak{X}.$$

27. — *Les inverses* M′, M_1' *de ces points sont tripolairement associés* (q. 285). Car on a pour M′ (J. S. 1890, p. 40),

(20) $$\frac{a\lambda'}{\lambda\alpha} = \frac{b\mu'}{\mu\beta} = \frac{c\gamma'}{\nu\gamma};$$

d'où, en combinant avec (12)

(21) $$\frac{a\lambda'}{\sin \mathfrak{X}} = \frac{b\mu'}{\sin \mathfrak{Y}} = \frac{c\nu'}{\sin \mathfrak{Z}}.$$

On a les relations analogues pour l'inverse du point jumeau, en changeant de signes $\mathfrak{X}$, ..., ce qui, en combinant avec (21), donne

$$\frac{\lambda'}{\lambda_1'} = \frac{\mu}{\mu_1'} = \frac{\nu'}{\nu_1'}.$$

28. — Il suit de là que, pour M_2, associé tripolaire de M, on a

(22) $$\operatorname{tg} \mathfrak{X}_2 = \operatorname{tg} (2A - \mathfrak{X}).$$

Car, pour trouver M_2, il faut prendre l'inverse de M, puis le jumeau et enfin l'inverse; ce qui conduit à une expression de la forme $\mathfrak{X}_2 = 2A + K.180^\circ$. K *ne peut être égal qu'à zero, ou à* -2. On le prouve en regardant M_2 comme déduit de M par rayons vecteurs réciproques, et en distinguant quatre positions de M par rapport à BC et au cercle OBC.

Dans les applications, il suffit de choisir celle des valeurs de K qui donne pour $\mathfrak{X}_2$ une valeur numériquement $< 180^\circ$ (*).

29. — *La droite qui joint les réciproques des jumeaux* M, M_1, *passe par* M_0 *réciproque* de H (q. 285). Car les coordonnées de ces réciproques sont $\operatorname{cotg} \mathfrak{X} \mp \operatorname{cotg} A$, ... On voit, en même temps, que *la droite passe par le point*

(23) $$\alpha : \beta : \gamma = \operatorname{cotg} \mathfrak{X} : \ldots$$

conjugué harmonique de H_0 par rapport à M_1, M_1'. Ce point peut à cause de la relation (23), être appelé l'*équicoordonné sur-*

(*) Pendant que Ω_1, Ω_2 ont pour angles, l'un A + B, ..., l'autre A + C, ..., on trouve pour leurs jumeaux A — B, ..., puis A — C (Lemoine, A. F. 1889).

Sa p 132

latéral de M. Quand M coïncide avec I, ce point coïncide avec point de Gergonne.

30. — Il y a un autre point analogue au précédent :

(24) $$\alpha : \beta : \gamma = a^2 \operatorname{cotg} (A - \mathfrak{X}) : \ldots$$

C'est le centre radical du cercle ABC et des cercles de rapport constant passant par M. Car on sait (*J. S.* 1890, p. 37) qu'en appelant $A_1B_1C_1$ le triangle podaire de M, on a, pour le point dont il s'agit :

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2\left(\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 - \overline{B_1C_1}^2\right) : \ \ldots$$

ce qui équivaut à (24).

31. — Soient $\mathfrak{X}_0, \ldots$ les angles réduits de M. Ceux du jumeau sont $180 - \mathfrak{X}_0, \ldots$ De là, on conclut facilement (**19**) *que si l'on partage les régions du plan en deux groupes, dont l'un soit formé par les angles tronqués, le point* M *et son jumeau sont toujours situés dans des régions de groupes différents.*

Les jumeaux des points de Brocard sont donc situés dans les angles tronqués. On peut montrer (**17**) que le jumeau de Ω_1 est intérieur au plus grand des angles A. B, C; l'autre est intérieur au plus petit. Il suit de là que, pour $A > B > C$, le premier de ces points a pour angles surlatéraux $C - 180^\circ$, A, B; le second, B, C, $A - 180^\circ$.

32. — Les questions 293 et 296 (p. 215, 240) traitent d'une autre espèce de coordonnées angulaires, les angles latéraux de M : ce sont les angles analogues à ceux qui définissent les points de Brocard (*). Ils sont formés par les côtés du triangle et les transversales angulaires de M. Ils varient de $+ 180^\circ$ à $- 180^\circ$.

Entre les onze formules qui les concernent, démontrons seulement celles qui sont le moins évidentes. Et d'abord on a :

(25, 26) $$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A'}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A''} = \frac{\operatorname{cotg} C'' + \operatorname{cotg} A'}{\operatorname{cotg} B' + \operatorname{cotg} A''}.$$

La première s'obtient en appliquant la formule (9) à un point qui glisserait sur MA, de M vers A. A la limite on a le

(*) Voir la note de la page 95. J. S. 1890.

résultat. La formule (26) s'obtient à l'aide de (25), en prenant MBC pour triangle de référence, et en observant que A a alors pour coordonnées $-\beta$, $-\gamma$.

33. — La formule qui conduit rapidement à l'angle de Brocard :

$$\frac{\sin B''}{\sin C'} = \frac{b \sin \mathfrak{Z}}{c \sin \mathfrak{Y}}, \tag{27}$$

se tire de

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\sin B''}{\sin \mathfrak{Z}}, \quad \frac{\lambda}{b} = \frac{\sin C'}{\sin \mathfrak{Y}}.$$

34. — Ajoutons cette autre formule, non trigonométrique :

Entre deux angles de même système, B′, C′, *on a la relation*

$$B' - C' = \pm 180^\circ - C - \mathfrak{X}; \tag{28}$$

On prendra le signe + *pour* M *situé au-dessus de* BC, *ou dans l'angle opposé par le sommet à* C.

35. — Voici une remarque qui permet de transformer plusieurs des formules précédentes. Quand deux angles m et n sont donnés par leur somme p et le rapport de leurs sinus, les traités de trigonométrie cherchent à les obtenir à l'aide de formules logarithmiques. Le contraire est souvent avantageux dans la géométrie du triangle. La relation

$$\frac{\sin m}{\sin n} = \frac{\sin (p - n)}{\sin n} = \sin p \,(\cot n - \cot p),$$

donne $\cot n$. On a, de même, $\cot m$.

BIBLIOGRAPHIE

Cosmographie par E. Catalan, 14e édition (Delalain frères, éditeurs, 56, rue des Écoles). Nous avons le plaisir de signaler à l'attention de nos lecteurs la quatorzième édition de la Cosmographie de M. E. Catalan, professeur émérite à l'Université de Liège. La vogue si persistante qui s'attache aux ouvrages de notre savant maître a une cause naturelle, que n'ignore aucun de ceux qui les ont lus. Ces ouvrages sont tous, en effet, composés avec une méthode parfaite; en outre, les matières qu'ils traitent y sont développées avec une rigueur absolue et dans un style d'une correction

irréprochable. Toutes ces qualités trouvent leur emploi dans le livre en question; nous ne sommes pas surpris du succès considérable qu'il a obtenu et nous y applaudissons bien vivement.

Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels, par M. Prosper de Lafitte, ancien élève de l'École Polytechnique, vice-président de la Société de secours mutuels d'Astaffort, lauréat d'une médaille d'or à l'Exposition universelle de 1889 (section des Sociétés de secours mutuels). — Deuxième édition, entièrement refondue. — Un volume grand in-8°, avec tables; 1890. — Prix : 5 fr. — Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.

Par sa forme tout élémentaire comme par le but que s'est proposé M. Prosper de Lafitte, cette Étude est un Essai dans une voie qui est, à bien des égards, nouvelle. Nous la croyons appelée à rendre les plus grands services aux mutualistes, surtout à un moment où tant de Sociétés mutuelles déploient une activité si remarquable, pour s'organiser scientiquement.

Une Table des matières, très développée, rend les recherches faciles. Voici les titres des Chapitres :

Chap. I. La mission et le domaine propre de la Société de secours mutuels (11 pages). — Chap. II. Des revenus d'origine extra-sociale (5 pages). — Chap. III. Les trois Assurances de la Société de secours mutuels (10 pages). — Chap. IV. Calcul des mises de retraite (14 pages). — Chap. V. Calcul des mises de maladies et des mises d'assurance en cas de décès (24 pages). — Chap. VI. Droits d'entrée. Retraites proportionnelles. Cotisations proportionnelles (24 pages). — Chap. VII. Systèmes divers (32 pages). — Chap. VIII. Des inventaires (25 pages). — Chap. IX. De l'augmentation des cotisations (9 pages). — Chap. X. Du livret individuel (7 pages). — Tables auxiliaires (9 pages). Tables calculées par l'auteur (17 pages).

Annuaire du bureau des longitudes (1891). — Depuis quelques années l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* a subi d'importantes modifications et publie, sans préjudice d'articles dus aux sommités de la science sur les Monnaies, la Statistique, la Minéralogie, etc , différentes études d'un intérêt actuel et spécial.

Celui qui vient de paraître (janvier 1891) donne un tableau d'étoiles doubles comprenant 62 systèmes, une description des spectres des étoiles et d'autres documents intéressant l'Astronomie stellaire. Une notice de M. Sarrau résume les propriétés des corps au voisinage du point critique, M. Cornu s'est occupé du nombre de vibrations de sons de l'échelle musicale; MM. Teisserenc de Bort et Moureaux des anomalies magnétiques présentées aussi bien en Algérie que dans le nord de la France.

Enfin, M. Janssen publie le récit de sa curieuse ascension du mont Blanc en chaise à porteurs ; M Tisserand étudie la question des petites planètes et M. Cornu expose la méthode qui permet de déterminer, par l'analyse spectrale, la vitesse des astres.

Malgré l'abondance des matières contenues dans ce volume de v-797 pages, le prix n'en a pas été augmenté (1 fr. 50 chez Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — Port en sus, 0 fr. 35).

QUESTION 356

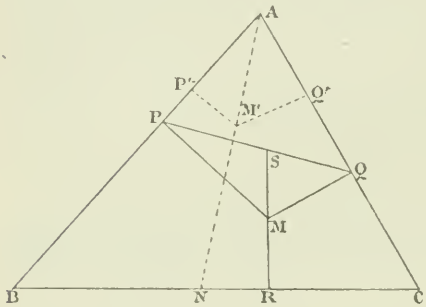
Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Dans un triangle ABC, *on abaisse d'un point* M, *sur* AB, AC *les perpendiculaires* MP, MQ; *puis, on joint* M *au milieu de* PQ; *le lieu de* M, *tel que cette dernière droite soit perpendiculaire à* BC, *est la symédiane menée de* A. (Poujade.)

Soient: R la projection de M sur BC; S l'intersection des droites PQ, MR.

On a évidemment

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PMR}{QMR} = \frac{MP.MR \sin B}{MQ.MR \sin C} = \frac{MP}{MQ} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}.$$



Donc

$$(1) \quad \frac{PS}{SQ} = \frac{MP}{MQ} : \frac{AB}{AC}.$$

Par suite, si

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{AB}{AC},$$

on a $PS = SQ$;

et inversement.

Cette propriété peut être énoncée d'une manière plus générale.

Soit M *un point du plan de triangle* ABC. *Une circonférence passant par les points* A, M *coupe les côtés* AB, AC, *aux points* P, Q, *et la circonférence* MPB *coupe* BC *en* R. *Le lieu de* M, *tel que la droite* MR *soit la médiane de* PQ, *est la symédiane de* ABC, *issue de* A.

La démonstration reste la même.

Remarques. — 1° Soient M', l'inverse de M; N l'intersection des droites AM', BC. En observant que

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{M'Q'}{M'P'}$$

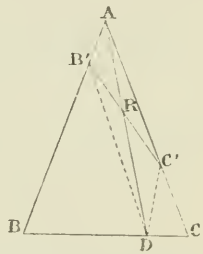
on déduit de (1)

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{AC.M'Q'}{AB.M'P'} = \frac{AM'C}{AM'B} = \frac{CN}{NB}.$$

Donc, *les points* S, N *divisent proportionnellement les droites* PQ, CB.

2° **Lemme.** — *Sur les côtés égaux* AB, AC *d'un triangle isoscèle* ABC *(ou sur leurs prolongements), on prend deux points quelconques* B′, C′. *La médiane de* B′C′, *issue de* A, *divise* BC *proportionnellement aux segments* AC′, AB′.

Soit D l'intersection de BC avec la médiane de B′C′. La droite BC étant également inclinée sur les bases AB′, AC′ des triangles DAB′, DAC′, les segments DB, DC sont proportionnels aux hauteurs de ces triangles. Mais les triangles DAB′, DAC′ étant équivalents, on a



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AC'}{AB'}.$$

Supposons que AM soit l'une des bissectrices de l'angle A. Alors M′ appartient à AM et N est le pied de la bissectrice. On a donc

$$\frac{MP}{MQ} = \pm 1$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{PS}{SQ} = \frac{CN}{NB} = \pm \frac{AC}{AB},$$

et, par suite, d'après le lemme, AS est la médiane de BC.

On retrouve ainsi la proposition donnée par M. *E. Cesàro* (*Mathesis*, t. I, pp. 79 et 117) :

D'un point M, *pris sur la bissectrice de l'angle* A *d'un triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* MA′, MB′, MC′ *sur les côtés. Les droites* MA′, B′C′ *se coupent sur la médiane issue de* A.

QUESTIONS PROPOSÉES

388. — On donne un triangle *abc*. Du sommet *a*, on mène la médiane *am* qui aboutit au milieu *m* de *bc* et la bissectrice *al* qui rencontre la base *bc* au point *l*. Du point *l*, on élève une perpendiculaire à la bissectrice *al*; cette droite coupe la médiane au point *p* et le côté *ab* au point *q* : démontrer que la perpendiculaire abaissée, de *p*, sur *bc* et la perpendiculaire élevée, de *q*, à *ab* se coupent sur la bissectrice *al*.

(Mannheim.)

389. — Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{q} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{p}.$$

(Humbert.)

ERRATA ET ADDITIONS

P. 121, l. 2. *Au lieu de* T, *lisez* S.

P. 122, l. 5. *Au lieu de* 5^m, *lisez* S^m.

P. 122, l. 9. *Au lieu de* 2T, *lisez* 2S.

P. 126, l. 9. *Lisez* relation qui peut se mettre sous les deux formes suivantes :

(3) $$\Sigma s_1 q_1 (p_1 - \rho) = 0,$$

(4) $$\sum \frac{s_1 q_1}{(p_2 - \rho)(p_3 - \rho)(p_4 - \rho)} = 0.$$

P. 126, l. 21. *Au lieu de* $\Sigma s_k q_k (p_k - \rho) = 0$, *lisez*

$$\sum \frac{s_k q_k}{(p'_k - \rho)(p''_k - \rho)(p'''_k - \rho)} = 0$$

P. 242, l. 5. *Au lieu de* $D_4 d_{34} + D_3 d_{31} + D_2 d_{12}$,
lisez $D_4 d_{34} + D_1 d_{31} + D_2 d_{32}$.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1824-1-91.

EXPRESSION DU RAYON

DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE A UN TÉTRAÈDRE SABC, EN FONCTION DES ARÊTES DE CE TÉTRAÈDRE

Par M. **Bernès.**

1. — La formule à établir est, comme on sait,

$$6VR = \Delta,$$

V désignant le volume du tétraèdre et Δ l'aire du triangle qui aurait pour côtés les produits des arêtes opposées $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ (*).

Considérons la section A'B'C' faite dans le tétraèdre, à une distance $SH = h$ du sommet, par un plan perpendiculaire, en H, au diamètre SL de la sphère circonscrite. Comme HA', HB', HC' sont perpendiculaires à SL et que LA, LB, LC le sont à SA, SB, SC, on a

$$2Rh = SA.SA' = SB.SB' = SC.SC',$$

ou, en posant $SA' = \alpha'$,...

$$2Rh = \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Dans les triangles semblables, SBC, SB'C', on a

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SB'}{SC} = \frac{2Rh}{SB.SC};$$

d'où

$$B'C' = a\alpha\,\frac{2Rh}{\alpha\beta\gamma}.$$

De même, $C'A' = b\beta.\dfrac{2Rh}{\alpha\beta\gamma}$, $\quad A'B' = c\gamma\,\dfrac{2Rh}{\alpha\beta\gamma}$.

Le triangle A'B'C' est donc semblable au triangle qui aurait pour côtés $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ (ce qui prouve la réalité de celui-ci); et si Δ est l'aire de ce dernier triangle, l'aire de A'B'C' est $\Delta\cdot\dfrac{4R^2h^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$. Le volume V' du tétraèdre SA'B'C' a donc pour expression $\dfrac{1}{3}\,\Delta\,\dfrac{4R^2h^3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$. Et comme $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}$, il en résulte

(*) Nous désignons par a, b, c, les arêtes situées dans l'une des faces; α, β, γ représentent alors les arêtes respectivement opposées aux précédentes.

$$V = \frac{1}{3}\Delta\frac{4R^2h^3}{\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'} = \frac{1}{3}\Delta\frac{4R^2h^3}{8R^3h^3} = \frac{1}{6}\frac{\Delta}{R};$$

d'où, la formule $$6VR = \Delta.$$

2. — Il est inutile de rappeler l'expression de Δ en fonction de a, α, b, β, c, γ. Celle de V est moins usuelle.

Une des formes qu'on peut lui donner est

$$144V^2 = \Sigma a^2\alpha^2(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 - a^2 - \alpha^2) - \Sigma a^2b^2c^2.$$

La première somme Σ s'applique à la permutation des lettres a, b, c; α, β, γ. La seconde comprend les quatre produits analogues à $a^2b^2c^2$, dans chacune des faces; c'est-à-dire : $a^2b^2c^2 + a^2\beta^2\gamma^2 + b^2\gamma^2\alpha^2 + c^2\alpha^2\beta^2$.

Si l'on désigne par m, m', m'' les longueurs des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées, on a

$$4m^2 = b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 - a^2 - \alpha^2,$$

de sorte qu'abréviativement, on peut écrire

$$144V^2 = 4\Sigma a^2\alpha^2m^2 - \Sigma a^2b^2c^2.$$

Remarque. — La section A'B'C', considérée dans la démonstration, peut être regardée comme déterminée par l'intersection des trois arêtes SA, SB, SC et d'une sphère quelconque passant par A, B, C. Et comme, aux trois sommets A, B, C, on peut en substituer trois autres quelconques, la démonstration met en évidence cette propriété : *Le triangle déterminé sur un tétraèdre par une sphère quelconque, passant par trois des sommets du tétraèdre, est constamment semblable au triangle qui aurait pour côtés les produits des arêtes opposées : $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$.*

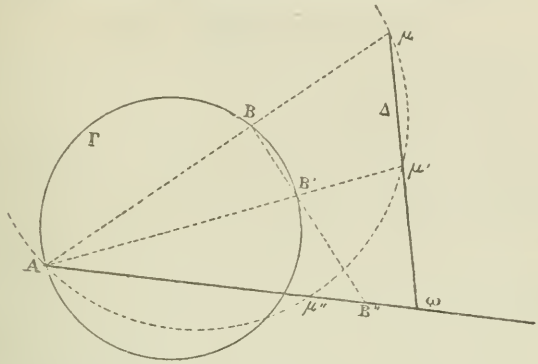
DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

DU THÉORÈME DE FRÉGIER

Le théorème de Frégier, pris dans son sens le plus général, correspond, comme l'on sait, à l'énoncé suivant :

Si, autour d'un point A *pris sur une conique* Γ, *on fait tourner deux cordes* AB, AB' *qui se correspondent homographiquement et en involution,* BB' *passe par un point fixe.*

Nous nous proposons d'établir cette proposition en supposant que Γ est un cercle; la généralisation au cas ou Γ est une conique se fera par la perspective, la propriété des fais-



ceaux homographiques en involution dans une figure donnée se conservant quand on fait la perspective de cette figure.

Prenons sur AB, AB′ des points μ, μ' tels que

$$AB.A\mu = AB'.A\mu' = a^2;$$

la droite BB′ pourra être considérée comme la transformée par inversion (le pôle étant en A, la puissance d'inversion étant égale à a^2), de la circonférence $A\mu\mu'$.

Observons que μ, μ' décrivent sur Δ deux divisions homographiques en involution; il existe donc sur Δ un point ω (*le point central*) tel que

$$\omega\mu.\omega\mu' = K^2.$$

Traçons Aω et marquons les points μ'', B″ où cette droite rencontre la circonférence $A\mu\mu'$, et la droite transformée BB′.

Nous avons $\omega\mu.\omega\mu' = \omega\mu''.\omega A = K^2$.

Ainsi μ'' est un pointfixe; le point correspondant B″ est donc fixe, lui aussi. Cette remarque établit complètement le théorème de Frégier.

Remarque. — Dans cette démonstration, a désignait une quantité fixe; la droite Δ, correspondante, se trouvait ainsi déterminée. Il est facile de reconnaître que si a varie, ω se déplace sur une droite déterminée, passant par A; c'est la droite AB″ qui joint le point A, au point fixe B″, autour duquel tournent les transversales BB′.

LES COORDONNÉES ANGULAIRES

Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

I. — *Propriétés des cercles latéraux de* M.

1. — Il ressort des formules données dans un article précédent (*J. E.*, 1891, p. 35) que, *si deux points* M, M_1 *sont situés sur un même cercle latéral* BC, *on peut en déduire trois nouveaux couples de points qui se trouvent aussi sur un même cercle latéral* BC. Ce sont leurs inverses, leurs jumeaux, leurs points tripolairement associés. Nous allons y ajouter, plus loin (**29**), les points annexes et les associés antipodaires (**19**). Enfin, il y a tous les points obtenus en répétant ou en combinant les opérations précédentes (*); ce qui donne un nombre infini de points.

Ce théorème permet de trouver plusieurs couples de points formant, avec deux sommets de ABC, des quadrilatères inscriptibles. Or chacun renferme six couples d'angles égaux, ou supplémentaires, lesquels sont des coordonnées angulaires ou leurs différences. On est conduit ainsi à des relations trigonométriques ou à des démonstrations synthétiques. Le théorème suivant a le même but.

2. Lemme. — *Le lieu des points* M *tels qu'en prenant leurs inverses* M′, *on ait* $\frac{\lambda'}{\lambda}$ *égal à une constante* K *est un cercle latéral décrit sur* BC *et son conjugué* (**). En effet (*J. S.* 1890, p. 40)

(*) En prenant le jumeau, puis l'inverse de M, on trouve le point $(A + \mathfrak{A}, \ldots)$ (voir 8). En répétant n fois cette double opération, on trouve $(nA - \mathfrak{A}, \ldots)$.

(**) On dit que deux cercles sont conjugués entre eux quand les puissances de A, B, C, par rapport à ces deux cercles, sont égales et de signes contraires. Les centres sont alors symétriques par rapport à O (Lalbalettrier, *Trig.* p. 150). On reconnaît que deux points M, M_1 sont

cette relation équivaut à

$$(1) \qquad \pm \frac{x\sum ax}{\sum ayz} = K,$$

laquelle donne les deux cercles. — On voit qu'*on peut disposer de* K *de manière à obtenir tous les cercles de cette espèce.*

3. Théorème. — *Quand deux points* M, M_1 *sont situés sur le même cercle latéral* BC, *ou sur deux cercles latéraux conjugués entre eux, si l'on prend leurs inverses* M′, M'_1, *les triangles* AMM_1, $AM'M'_1$, *sont symétriquement semblables.*

En effet, dans les deux triangles considérés, les angles en A sont égaux et les côtés adjacents sont proportionnels, d'après le lemme précédent.

Si l'un des triangles est rectangle, l'autre l'est aussi (voir **10**).

II. — Triangles déduits de M.

4. — On dit qu'un triangle $A_1B_1C_1$, quelconque ou déduit de ABC suivant une certaine loi, a une *orientation semblable* à celle de ABC, lorsqu'en parcourant les deux périmètres dans le sens alphabétique, on détermine, sur les deux cercles circonscrits, des rotations de même sens.

Parfois, on se trouve en présence de deux lois exigeant qu'on place les lettres A_1, ... d'une manière différente, d'où résultent des orientations contraires. Il faut alors opter entre les deux points de vue, avant de préciser les énoncés. Ainsi, quand un triangle est inscrit ou circonscrit à ABC, il y a là une *correspondance de situation*, que nous adopterons habituellement. Mais si le second triangle est équiangle à ABC, on a une correspondance toute différente, plus importante dans les questions de centre de similitude (**8**). La correspondance de

---

sur des cercles latéraux conjugués quand on a $\frac{\sum a^2\beta\gamma}{\sigma\alpha} = -\frac{\sum a^2\beta_1\gamma_1}{\sigma_1\alpha_1}$ et par suite $\cot\mathfrak{A} + \cot\mathfrak{A}_1 = 2\cot A$. De la première de ces relations, on déduit que les inverses sont aussi sur deux cercles analogues.

situation ne sera plus indiquée alors que par l'ordre des lettres A_1, B_1, C_1.

5. — Nous conviendrons que, si $A_1B_1C_1$ a une orientation contraire à celle de ABC, nous regarderons ses angles et sa surface comme négatifs. Par abréviation, nous l'appellerons même : *triangle négatif*. Cette convention de signes généralise les formules. Ainsi on pourra dire, dans tous les cas, que l'aire S_1 du triangle podaire est proportionnelle à la puissance P de M et que, par conséquent,

$$S_1 = -\frac{SP}{4R^2}; \tag{2}$$

car, en coordonnées absolues, on a toujours la relation équivalente

$$S_1 = \frac{1}{2}\Sigma xy \sin A. \tag{3}$$

6. — Un triangle, formé par des droites mobiles, ne peut changer de signe, *en passant par zéro*, s'il se réduit à un point. En effet, par définition, l'orientation doit changer de sens. Or il est facile de s'assurer qu'après s'être réduit à un point le triangle reprend la même orientation. Il faut donc qu'il s'aplatisse.

7. — *Triangle podaire* $A_1B_1C_1$ *de* M. — L'angle A_1 est

$$A_1 = \mathfrak{A} - A + K.180^\circ \quad (K = 0 \text{ ou } +2). \tag{4}$$

On le voit en examinant les trois angles, pour trois espèces de positions que M peut occuper sur AM coupant intérieurement ABC (on considère des couples de quadrilatères inscriptibles).

Dans chaque application, on détermine K par la condition que A_1 soit numériquement inférieur à 180°, ce qui sert également pour le problème inverse ; ou, si l'on veut tenir compte de la position de M, on prouve que $K = 2$ *pour* M *compris entre* BC *et l'arc inférieur du cercle circonscrit. Autrement* $K = 0$.

Le triangle passe de + à − en changeant de signe quand M sort du cercle circonscrit.

8. — Si l'on demande d'inscrire, à ABC, un triangle semblable à un triangle donné PQR, que nous supposerons orienté

comme ABC, on sait qu'il y a douze combinaisons (étudiées par M. Artzt). Chacune donne une série de solutions. Cherchons d'abord les six triangles directement semblables à PQR. Soit T un premier triangle. Deux autres s'en déduisent en permutant circulairement P, Q, R. Pour les trois suivants, il faut permuter deux lettres à volonté, mais en changeant les signes des angles, sans quoi (**4**) on aurait un ordre tel que PRQ qui donne un triangle symétriquement semblable. Les six autres triangles se déduisent des premiers par un changement des signes des angles.

La construction du centre de similitude montre que *les triangles d'une même série ont un centre permanent de similitude. Ce point a un de ses triangles pour triangle podaire.* Dès lors on calcule facilement $\mathfrak{A}$,... pour ce point (**4**). Abstraction faite d'un multiple de π, le premier centre a pour angles $A + P$, $B + Q$, $C + R$, et le sixième, $A - P$,... etc. Par suite (**1**, note) les six derniers centres sont les associés tripolaires des six premiers et les douze points ont pour inverses : le premier ($-P$, $-Q$, $-R$) et les autres points qu'on déduit de celui-là par des permutations (*) et changements de signes (voir aux triangles circonscrits, **24**).

9. Application. — Si PQR n'est autre que ABC, les centres sont O, Ω_1, Ω_2; le suivant a pour angles O, $B - C$, $C - B$. C'est donc $\alpha = 0$, $\frac{\beta}{b^2} = -\frac{\gamma}{c^2}$, c'est-à-dire le pied de la tangente en A au cercle ABC. Il y a deux autres points analogues. Puis viennent : un point à l'infini, les associés tripolaires de Ω_1, Ω_2 et enfin trois points A_2,... Pour $A < 90^\circ$, A_2 a comme angles réalisés $2A$, $180^\circ - A$, $180^\circ - A$ (**). Le calcul de ses coor-

(*) Sans cesse, dans la géométrie du triangle, on rencontre des points déduits d'un autre par la permutation de *trois* ou de *deux* coordonnées. Ex. : Les isobariques et semi-réciproques de M. Ici nous sommes amenés à la transformation analogue pour les coordonnées angulaires. On l'a rencontrée aussi pour les coordonnées tripolaires (*J. S.* 1890 p. 111). Il serait à désirer qu'une dérivation aussi usuelle, aussi fondamentale, pût être désignée, quand elle se présente, par quelque terme *général* qui la mît en lumière. Par exemple ne pourrait-on pas dire : les *permutiens* et *semi-permutiens* de M? Ces deux mots suffisent pour nommer les vingt-trois associés angulaires de M.

(**) De là on conclut deux propriétés angulaires qui rappellent celles

données barycentriques montre que c'est un sommet du second triangle de Brocard.

10. — Les douze inverses de ces points sont M, Ω_2, Ω_1; puis le jumeau de H, c'est-à-dire tout point du cercle circonscrit; Ω_1 et les points a_2,... inverses de A_2,...

Le point a_2 a été étudié par M. Neuberg (*M.* 1890, p. 166). Pour $A < 90°$, ses angles surlatéraux sont $180° - A$, $180° - C$, $180° - B$. En vertu de (**3**), il est la projection de O sur AG, puisque son inverse A_2 est la projection de H sur AK (Neuberg).

11. — Si on prend les symétriques de M par rapport aux trois côtés, on a un triangle homothétique à $A_1B_1C_1$. M. Neuberg appelle ce triangle le triangle réflexe de M (*Des projections* etc..., p. 61). *(A suivre.)*

LES PROGRÈS

DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE, EN 1890;

Par M. **E. Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 28.)

---

6. Séries de points remarquables. — Si l'on combine entre elles les coordonnées d'un ou de plusieurs points du plan du triangle, on donne naissance à d'autres points qui, en général, jouissent, par rapport aux premiers, de propriétés remarquables. Partant de là, M. Poulain (*Sur quelques séries de points remarquables dans le plan du triangle;* M. pp. 246-251) a résolu les problèmes suivants :

1° *Étant donnés deux points* M_1, M_2, *dans le plan du triangle* ABC, *construire un troisième point* M_3 *dont les coordonnées barycentriques soient égales aux produits* $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ *des coordonnées barycentriques* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ *de* M_1 *et* M_2.

---

des points de Brocard : 1° A_2 est sur deux cercles latéraux passant par Ω_1, Ω_2; 2° deux couples d'angles latéraux sont les mêmes (formule 28 du *J. E.* 1891, p. 44.) : $A' = C'$, $A'' = B''$. Le point inverse a_2 possède, dès lors, des propriétés analogues.

2° *Étant donnés deux points dans le plan d'un triangle* ABC, *construire un troisième point dont les coordonnées barycentriques soient égales aux quotients des coordonnées barycentriques homologues des points donnés.*

Après avoir donné diverses constructions de ces points et étudié certains cas particuliers, M. Poulain signale quelques nouveaux points remarquables.

Le point dont les coordonnées barycentriques sont (αa^n, βb^n, γc^n) ou ($\alpha \sin^n A$, $\beta \sin^n B$, $\gamma \sin^n C$), α, β, γ étant celles d'un point donné M, est le *sinusien d'ordre* n *de* M. Inversement, ce dernier est l'*antisinusien* du premier, ou son sinusien d'ordre $(-n)$. Si le sinus est remplacé par le cosinus ou la tangente, on a le *cosinusien* ou le *tangentien*. M donne donc naissance à trois séries de points.

Si l'on multiplie les angles par 2 ou $\frac{1}{2}$, 4 ou $\frac{1}{4}$, etc... on a de nouvelles séries, qui dans le cas des sinus peuvent s'appeler le *double sinusien* et le *demi-sinusien*, etc.

En terminant, M. Poulain donne une construction de ces points; puis, il indique certaines particularités qui se présentent dans ce tracé.

7. Cercle des neuf points. — Deux démonstrations (*) du théorème de Feuerbach ont été données. L'une, due à M. Milne, a été communiquée par M. Lalbalettrier (*J. E.* 1890, pp. 3-5); l'autre a été indiquée par M. Lauvernay (*J. E.* 1890, pp. 193-195). Ces démonstrations sont remarquables par leur grande simplicité.

8. Cercle de Fuhrmann. — Ce cercle est celui qui a pour diamètre la droite qui joint l'orthocentre H au point de Nagel ν. Il a été étudié par M. Fuhrmann (*Sur un nouveau cercle associé à un triangle. M.* 1890, pp. 105-111).

Si A'B'C' et A''B''C'' sont des triangles complémentaires et anticomplémentaires de ABC : A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3, les points où le cercle circonscrit à ABC coupe les bissectrices AI, BI, CI et les droites qui joignent entre eux les centres I_a, I_b, I_c des cercles ex-inscrits, on a les propositions suivantes :

(*) M. Clément Thiry en a donné une (*Mathesis*, 1886, p. 106). Elle a été reproduite par M. Catalan, qui l'avait trouvée de son côté dans la Note intitulée : *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes.*

1. *Soient* A_2, B_2, C_2 *les symétriques de* A_1, B_1, C_1 *par rapport à* BC, CA, AB : *le triangle* $A_2B_2C_2$ *est inscrit au cercle de Fuhrmann et est symétriquement semblable aux triangles* ABC, $I_a I_b I_c$.

2. *On prend, sur les hauteurs* AH, BH, CH *du triangle* ABC, *les segments* AA_4, BB_4, CC_4 *égaux au diamètre* 2r *du cercle inscrit : le triangle* $A_4B_4C_4$ *est inscrit au cercle de Fuhrmann; de plus, il est symétriquement semblable à* ABC.

3. I *est le centre de perspective des triangles* $A_2B_2C_2$. $A_4B_4C_4$.

4. I *est le point double des triangles symétriquement semblables* ABC, $A_4B_4C_4$, *et aussi celui des triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

5. *Soient* I'_a, I'_b, I'_c *les symétriques de* I_a, I_b, I_c *respectivement par rapport aux droites* BC, CA, AB. *Les circonférences circonscrites aux triangles* BCI'_a, CAI'_b, ABI'_c *et les droites* AI'_a, BI'_b, CI'_c *passent par un même point* R. *Les côtés du triangle* $A_2B_2C_2$ *sont perpendiculaires aux milieux des droites* AR, BR, CR. I *et* R *sont des points jumeaux.*

6. *L'axe d'homologie des triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *est perpendiculaire au milieu de la droite* IR *et touche, en ce point, le cercle inscrit à* ABC.

7. *Le cercle inscrit à* ABC *et le cercle des neuf points se touchent au milieu de la droite* IR.

8. *Les droites* A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4, *rencontrent respectivement* BC, CA, AB, *en trois points* V_a, V_b, V_c, *situés sur la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points.*

9. *Les perpendiculaires abaissées de* A_1, B_1, C_1, *sur les côtés opposés du triangle* $A_2B_2C_2$ *concourent en un même point* S *de la circonférence* O. *Ce point est situé sur la droite* Ov *et est, dans le triangle* ABC, *l'homologue du point* v *considéré dans le triangle* $A_4B_4C_4$.

10. *Les perpendiculaires abaissées de* A, B, C, *sur les côtés opposés du triangle* $A_4B_4C_4$ *concourent en un même point* T *de la circonférence* O : T *et* H *sont des points homologues des triangles* ABC, $A_4B_4C_4$.

11. *L'axe d'homologie des triangles* ABC, $A_4B_4C_4$ *est perpendiculaire à* HT.

12. *Les droites doubles des triangles inversement semblables* ABD, $A_4B_4C_4$ *rencontrent les hauteurs* AH, BH, CH *de* ABC *en des points* (X_a, X_b, X_c), (X'_a, X'_b, X'_c) *tels que l'on a :*

$$AX_a = BX_b = CX_c = R - d, \qquad AX'_a = BX'_b = CX'_c = R + d,$$

d *étant la distance* OI.

Mathesis publiera, ultérieurement, des recherches de M. Mandart qui forment un complément à l'article de M. Fuhrmann.

9. Paraboles de Artzt. — Ces paraboles forment deux groupes : elles sont confocales deux à deux, et elles ont pour foyers les sommets A_2, B_2, C_2 du second triangle de Brocard.

Le premier groupe (P) renferme les paraboles P_a, P_b, P_c tangentes à deux côtés du triangle, aux extrémités du troisième.

Le second groupe (Q) renferme les paraboles tangentes aux deux bissectrices d'un angle et aux médianes correspondantes.

Les paraboles (P) ont récemment été considérées par M. de Longchamps.

Après avoir donné une démonstration élémentaire (*J. E.*, 149-151) de la formule qui donne le paramètre de ces courbes, M. de Longchamps a fait connaître (*Sur les paraboles de Artzt*, *J. S.*, 1890, pp. 149-153) la propriété suivante :

Si A′, B′, C′ *sont les points communs à* P_b *et* P_c, P_c *et* P_a, P_a *et* P_b, *les tangentes en* A′, *à* P_b *et* P_c, *sont respectivement parallèles aux médianes issues de* C *et de* B. D'où ce théorème : *Les paraboles* (P) *se coupent aux points* A′, B′, C′; *les aires des triangles curvilignes qu'elles déterminent sont données par les formules :*

$$AC'B' = CA'B' = BA'C' = \frac{17}{81}ABC,$$

$$AC'B = BA'C = CB'A = \frac{5}{81}ABC.$$

Dans cette Note, M. de Longchamps met aussi en lumière une certaine ellipse U dont l'équation barycentrique est

$$8\Sigma\alpha^2 = 11\Sigma\alpha\beta,$$

et il indique à ce propos le théorème suivant :

1° *L'ellipse* U *a pour centre le centre de gravité* G *du triangle; elle passe par les points* A′, B′, C′ (*centres de gravité des triangles* AGB, BGC, CGA) *communs aux paraboles* (P); 3° *les demi-axes* α, β *de cette ellipse sont donnés par les formules :*

$$\alpha\beta = \frac{8 \text{ aire } ABC}{27\sqrt{3}}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{81}.$$

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR UN PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (A)

Par M. **Humbert**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 32.)

Géométrie.

21. — On admettra la connaissance du premier livre de Géométrie élémentaire. — Rappeler les idées fondamentales en Géométrie, les axiomes, les mouvements simples et, en quelque sorte, intuitifs. — Cercle. — Propriétés qui dérivent immédiatement de la définition et des idées élémentaires sur le plan. — Position d'un point par rapport à un cercle. — Sécantes.

non-sécantes, tangentes. — Cordes et arcs sous-tendus. — Arcs égaux, somme de plusieurs arcs, arcs inégaux. — Relations qui existent entre une corde, l'arc sous-tendu et l'angle au centre. — Sécantes parallèles. — Tangente et normale. — Propriétés simples de la tangente et de la normale dans le cercle. — Distances d'un point à un cercle.

22. — Cercle passant par trois points, cercle limite. — Positions relatives de deux cercles. — Angles de deux courbes. — Des cercles orthogonaux.

23. — Mesure des grandeurs. — Mesure des angles au moyen des arcs. — Angles inscrits. — Quadrilatères inscrits. — Segment capable d'un angle, cas de l'angle droit. — Problèmes graphiques simples.

24. — Mener, par un point, une tangente à un cercle. — Portion de tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes ; cas des tangentes parallèles. — Mener les tangentes communes à deux cercles. — Cercles tangents aux côtés d'un triangle. — Quelques problèmes sur le centre.

25. — Suite de la mesure des grandeurs, mesure des aires. — Théorèmes généraux, théorèmes particuliers. — Longueur d'un arc de courbe convexe et ayant des tangentes en chaque point. — Application au centre, propriétés particulières au cercle. — Lignes brisées régulières, ordinaires et étoilées. — Polygones réguliers ordinaires et étoilés. — Problèmes relatifs aux polygones réguliers. — Calcul de π. (A cette partie du programme se rattachent beaucoup de questions très simples qui peuvent, sans inconvénient, n'être pas traitées dans ce cours).

26. — Représentation des points d'une ligne droite par des nombres positifs ou négatifs. — Représentation d'un couple de points par les racines d'une équation du second degré, éléments d'un couple, point milieu, puissance d'un point par rapport à un couple. — Couple de points imaginaires conjugués. — Représentation géométrique d'un couple de points, réels ou imaginaires, par une droite et un cercle. — Conclure de là le théorème relatif à la puissance d'un point par rapport à un cercle. — Changement d'origine sur un axe d'abscisses. — Montrer qu'un pareil changement n'altère pas les deux éléments d'un couple. — Étude du rapport $\frac{AM}{BM}$, quand le point M parcourt la droite des deux points fixes A, B.

27. — Relations entre les segments que déterminent des points en ligne droite. — Étudier, en particulier, le cas de quatre points. — Représentation d'un point mobile M sur une droite AB par le nombre $\lambda = -\frac{AM}{BM}$. — Changement de coordonnées, relation qui existe entre l'abscisse et le nombre λ ; comme application, montrer que le discriminant correspondant à un couple se reproduit, multiplié par le carré du module de cette substitution ; calculer le rapport $\frac{AM}{BM}$, M étant un point d'abscisse quelconque et A, B les deux points d'un couple donnés par une équation du second degré. Transversales dans le triangle. — Théorème de Ménélaüs, extension de ce théorème à un polygone quelconque, extension au cas où un triangle est coupé par un système de droites ou par un cercle. — Application du

théorème de Ménélaüs au triangle, au quadrilatère complet, au théorème de Pascal, dans le cercle. — Théorème de Jean de Céva. — Application au triangle, aux cercles tangents aux trois côtés d'un triangle; propriétés harmoniques du quadrilatère complet.

Puissance d'un point, par rapport à un cercle, variation de cette fonction dans le plan du cercle. — Axe radical de deux cercles, divers cas, où l'un des cercles se réduit à un point ou à une droite. Centre radical de trois cercles, divers cas. — Construction simple de l'axe radical de deux cercles, dans tous les cas. — Application aux trois cercles décrits sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres. — Cercles orthogonaux à deux cercles donnés. — Cercle orthogonal à trois cercles donnés, divers cas. — Applications. — Construire les bissectrices de l'angle de deux droites imaginaires conjuguées. — Mener, par deux points, un cercle tangent à une droite donnée, à un cercle donné. — Mener un cercle orthogonal à deux cercles donnés et tangent à une droite donnée, à un cercle donné, divers cas. — Mener un cercle tangent à trois cercles donnés; solution de Gergonne, solution à l'aide de cercles orthogonaux, diverses solutions. — Faire traiter comme exercices, les divers cas particuliers et certains problèmes dépendant immédiatement des précédents.

28. — Figures homothétiques. — Homothétie directe, homothétie inverse. — Deux définitions équivalentes. — Propriétés générales des figures homothétiques. — Application au cercle, à un système de deux cercles, à un système de trois cercles; centres de similitude et axes de similitude, dans les divers cas. — Correspondance entre les points de deux courbes homothétiques et les sens de parcours. — Définition générale de la similitude, application aux lignes polygonales quelconques, propriétés de deux lignes polygonales semblables. — Autres définitions de la similitude des lignes polygonales planes. — Identité, dans ce cas, des trois définitions que l'on peut donner de la similitude. — Cercle des neuf points.

29. — Figures perspectives. — Figures homologiques. — Théorème relatif aux triangles homologiques. — Existence des figures homologiques d'une figure donnée. — Construction de ces figures. — Cas spécial des figures homologiques par affinité. — Définition de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole, comme sections planes du cône à base circulaire ou comme courbes homologiques du cercle. — Homologie de deux cercles; étudier avec détails les propriétés d'un couple de cercles, à ce point de vue. — Analogie entre l'homothétie et l'homologie.

30. — Figures inverses. — Application au cercle. — Diverses questions servant d'applications à cette théorie.

31. — Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite; les rapports anharmoniques sont égaux quatre par quatre; les six rapports anharmoniques forment trois couples de nombres inverses l'un de l'autre; ils s'expriment tous en fonction de l'un d'eux. — Étant donnés trois points en ligne droite, un quatrième point est défini par le rapport anharmonique qu'il forme avec les trois premiers; construction de ce point, discussion; valeurs que ne prend pas un rapport anharmonique. — Rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites, projectivité du rapport anharmonique. — Rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans.

— Expression de ces rapports au moyen de sinus. — Diverses manières d'exprimer que deux systèmes de quatre éléments ont même rapport anharmonique. — De l'usage du point à l'infini pour établir certaines relations ; diverses expressions du rapport anharmonique. — Expressions algébriques du rapport anharmonique de quatre points au moyen des coordonnées, abscisses ou rapports de ces points. — Rapport anharmonique de quatre nombres. — Cette fonction n'est pas altérée par une substitution linéaire ; montrer que ceci est la traduction algébrique de la projectivité du rapport anharmonique. — Divers cas dans lesquels les six rapports anharmoniques ne sont pas distincts ; éléments harmoniques, éléments équianharmoniques. — Digression algébrique ; calcul du rapport anharmonique de deux couples donnés par deux équations du second degré, conditions pour que ces deux couples soient harmoniques ou équianharmoniques, pour qu'ils aient un point commun. — Étant donnés trois points par une équation du troisième degré, former celle qui donne les conjugués harmoniques de chacun d'eux par rapport aux deux autres. — Discriminant de l'équation cubique. — Condition pour que quatre points donnés par une équation du quatrième degré soient harmoniques ou équiharmoniques, pour que deux d'entre eux coïncident.

32. — Application au cercle, rapport anharmonique de quatre points d'un cercle, de quatre tangentes à un cercle, extension de ces propriétés aux sections coniques. — Formes projectives de quatre éléments ; relier perspectivement deux formes projectives ; application aux théorèmes de Pascal et de Brianchon. — Étude détaillée de la division harmonique formée par quatre points en ligne droite. — Couples de points en involution, diverses constructions géométriques relatives à ces couples. — Équation de l'involution. — Faisceau de quatre droites harmoniques, de quatre plans harmoniques, faisceaux involutifs, cas particuliers. — Lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes soit constant. — Polaire d'un point, par rapport à deux droites, propriétés du quadrangle et du quadrilatère complet, triangle diagonal.

33. — Pôle et polaire dans le cercle, discussion. — Points conjugués, droites conjuguées, triangles polaires. — Quadrilatère inscrit, quadrilatère circonscrit. — Application immédiate de ces propriétés aux sections coniques. — Théorème de Desargues, réciproque. — Cas du quadrangle simple, du quadrilatère simple. — Application aux sections coniques. — Conséquences des théorèmes de Pascal et de Brianchon. — Application aux sections coniques.

34. — Séries projectives, faisceaux projectifs. — Relation homographique, divers cas. — Construction des éléments doubles. — Relier perspectivement deux formes projectives ; déduire de là une définition nouvelle des sections coniques. — Exemples simples de séries projectives et de faisceaux projectifs, dans le cercle et, par suite, dans les coniques. — Cas particulier de la parabole.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie élémentaire, rédigée conformément aux doctrines de la Géométrie moderne, par D. Z. G. de Galdeano, Docteur ès sciences, professeur de Géométrie analytique à l'Université de Saragosse, etc. (seconde édition, librairie de Menor Hermanos, Comercio, 57; Tolède; prix 10 pesetas). — Nous signalons à l'attention de nos lecteurs l'ouvrage de M, Galdeano. Comme l'indique le titre que nous venons de reproduire ce livre, à côté de la Géométrie d'Euclide, développe les principes si féconds de la géométrie moderne et montre leurs principales applications. La théorie de l'involution, l'homographie, l'homologie, la transformation par inversion, etc..., ont fait l'objet de développements circonstanciés et bien ordonnés. Ce livre est écrit dans la langue de l'auteur; mais, grâce aux rapprochements si nombreux qui existent entre le latin et la langue espagnole, sa lecture est facile, comme je m'en suis aperçu, même pour ceux qui ignorent cette dernière.

Nous signalerons aussi, du même auteur, parmi ses nombreux ouvrages, une *Critique et synthèse de l'Algèbre*. C'est un écrit philosophique, mais qui présente un intérêt mathématique véritable et dans laquelle M. G. de Galdeano fait preuve d'une grande érudition.

Je ne veux pas terminer cette petite notice bibliographique sans signaler l'apparition, sous la direction de M. G. de Galdeano, d'un nouveau Journal de mathématiques intitulé *El progresso matemático* et dont le premier numéro a paru à Saragosse le 20 janvier dernier. Cette publication a surtout pour mission de réveiller en Espagne le goût des sciences mathématiques. Nous souhaitons à cette œuvre excellente tout le succès auquel elle a droit, tant par le but qu'elle se propose d'atteindre que par le haut mérite de son Directeur.

Euclid revised, ouvrage renfermant dans les six premiers livres, les éléments essentiels de la Géométrie plane, tels qu'ils ont été donnés par Euclide ; avec des exercices et de nombreuses propositions additionnelles; par R. C. J. Nixon, professeur des mathématiques à l'Institut Académique de Belfast ; seconde édition; Oxford, Clarendon press, 1890.

Nous recommandons ce traité de Géométrie élémentaire plane à ceux de nos lecteurs qui peuvent lire un texte mathématique anglais. C'est un ouvrage très bien rédigé, rempli de notes intéressantes et admirablement imprimé. G. L.

QUESTION 324

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Des sommets A, B, C *d'un triangle* ABC, *avec les côtés opposés, et des milieux des côtés, avec les médianes correspondantes, pour rayons, on décrit respectivement les cercles* S_a, S_b, S_c, M_a, M_b, M_c.

Soient A *et* A′ *les intersections de* M_a *avec le cercle circonscrit* ξ; A′ *et* A_1 *les intersections de* S_b *et* S_c; A″ *et* A_2 *les intersections de* S_a *et* M_a; *et* B′, C′; B_1, C_1; B″, C″; B_2, C_2 *les points analogues aux précédents :*

1° *Les cercles* S_a, S_b, S_c, M_a, M_b, M_c *ont pour centre radical commun le point* H_1, *symétrique de l'orthocentre* H *par rapport au centre du cercle circonscrit;*

2° A′B′C′ *est le triangle orthocentrique de* $A_1B_1C_1$ *qui est lui-même le triangle anticomplémentaire de* ABC;

3° *Les droites* B′C′, C′A′, A′B′ *sont les axes radicaux du cercle circonscrit et des cercles* S_a, S_b, S_c; *elles coupent respectivement* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *en trois points* α, β, γ *situés sur la droite* δ *de Longchamps;*

4° *Les points* α, β, γ *sont respectivement les centres radicaux des groupes des circonférences*

$$\xi,\ \Delta,\ S_a,\ M_a;\quad \xi,\ \Delta,\ S_b,\ M_b;\quad \xi,\ \Delta,\ S_c,\ M_c,$$

Δ *désignant le cercle de Longchamps;*

5° *Les six points* A″, A_2, B″, B_2, C″, C_2 *sont situés sur une même circonférence* Σ *ayant pour centre le centre de gravité* G *du triangle et dont le rayon* ρ *est donné par la formule*

$$\rho^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2);$$

6° *Le cercle* Σ *passe par l'intersection du cercle de Longchamps et du cercle anticomplémentaire du cercle circonscrit;*

7° *Le cercle* Σ *est le cercle directeur de l'ellipse de Steiner.*

(E. Vigarié.)

Il est évident que les cercles S_a, S_b, S_c sont les anticomplémentaires des cercles ayant BC, CA, AB pour diamètres; de même M_a, M_b, M_c sont anticomplémentaires des cercles décrits sur les médianes comme diamètres. Or, on sait (*J. E.* 1889, p. 96, *Question 320*) que l'orthocentre est le centre radical des circonférences ayant pour diamètres les médianes et aussi (Catalan, *Théorèmes et problèmes*, 1879, p. 119) le centre radical des circonférences ayant pour diamètres les côtés du triangle. Donc :

1° Le centre radical commun des six cercles (S), (M) est le point H_1 anticomplémentaire de l'orthocentre H de ABC. Ce

point est, par suite, symétrique de H par rapport au centre O du cercle circonscrit ξ.

A cause de l'homothétie, les cordes communes A_1A', B_1B', C_1C' des cercles S_a, S_b, S_c sont les hauteurs du triangle anticomplémentaire $A_1B_1C_1$. Donc :

2° $A'B'C'$ est le triangle orthocentrique de $A_1B_1C_1$;

3° Les points α, β, γ appartiennent à l'axe d'homologie des triangles $A_1B_1C_1$ et $A'B'C'$. Ainsi $\alpha\beta\gamma$ est l'axe orthique de $A_1B_1C_1$ et par suite l'anticomplémentaire de celui de ABC : c'est donc la droite δ de Longchamps.

Le cercle circonscrit ξ étant le cercle des neuf points de $A_1B_1C_1$, $B'C'$ est la corde commune de ξ et S_a, AA' est celle de ξ et M_a. Soit encore ξ_1 le cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$ et par suite l'anticomplémentaire de ξ : B_1C_1 est la corde commune de ξ_1 et S_a. Donc :

4° Le point α est le centre radical de ξ, ξ_1 S_a et M_a.

De même, β et γ sont les centres radicaux des groupes $(\xi, \xi_1 S_b, M_b)(\xi, \xi_1, S_c, M_c)$. La droite δ est l'axe radical de ξ et ξ_1.

On sait que la médiane d'un côté du triangle est supérieure, égale ou inférieure à la moitié de ce côté, suivant que l'angle opposé est aigu, droit ou obtus. Donc les circonférences S_a et M_a se coupent, sont tangentes ou intérieures l'une à l'autre, suivant que l'angle en A est aigu, droit ou obtus.

Si tous les angles de ABC sont aigus, il y a donc six points A_2, A'', B_2, B'', C_2, C'' communs aux circonférences S_i, M_i.

D étant le point diamétralement opposé à A_2 sur M_a, on a

$$\overline{GA_2}^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{2\overline{AA_2}^2 + 2\overline{DA_2}^2 - \overline{AD}^2}{4}\right) = \frac{\overline{DA_2}^2 + 3\overline{AA_2}^2}{6}.$$

Mais $\qquad \overline{DA_2}^2 = 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \qquad AA_2 = a$;

par suite $\qquad \overline{GA_2}^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$

Cette expression étant symétrique, en a, b, c, on conclut de là que :

5° Les six points communs aux cercles S_i, M_i sont équidistants de G, et le carré de cette distance est :

$$\rho^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

6° Les points α, β, γ ayant même puissance par rapport aux cercles ξ, ξ_1, Σ, la droite δ est l'axe radical commun de ces trois cercles.

Supposons maintenant que le triangle ABC soit obtusangle en A.

L'orthocentre H, qui est le centre de ξ_1 étant alors en dehors de ξ, on a :

$$HO > R, \qquad \text{ou bien} \qquad HO > HA_1 - OA.$$

D'autre part $HO \leqslant HA + AO < HA_1 + OA$.

Donc ξ et ξ_1 se coupent. Soient θ, θ' leurs points communs (*).

Puisque
$$\frac{O\theta}{H\theta} = \frac{1}{2} = \frac{OG}{GH} = \frac{H_1O}{H_1H},$$
les droites θG, θH_1 sont les bissectrices, intérieures et extérieures de $O\theta H$. Par suite

$$\overline{\theta H_1}^2 = H_1O.H_1H - O\theta.\theta H = 2\left(\overline{H_1O}^2 - R^2\right).$$

Mais, $\left(\overline{H_1O}^2 - R^2\right)$ étant la puissance de H_1 par rapport au cercle ξ, on a :

$$\overline{H_1O}^2 - R^2 = H_1A' \frac{H_1A_1}{2},$$

d'où
$$\overline{\theta H_1}^2 = H_1A' \times H_1A_1.$$

De cette expression et de 1° il suit que le cercle ayant son centre en H_1 et $H_1\theta$ pour rayon coupe orthogonalement les six cercles (S) (M) : c'est donc le cercle de Longchamps (**).

L'angle $H_1\theta G$ étant droit, le cercle Δ coupe aussi orthogonalement le cercle décrit de G comme centre avec $G\theta$ pour rayon (***) : c'est celui qui a été désigné par Σ. En effet, le point H_1 ayant même puissance par rapport aux cercles S_b, M_b et $G\theta$, ces cercles ont même axe radical — la perpendiculaire de H_1 sur BG — (****). De là une autre manière de calculer ρ :

(*) La droite $\theta\theta'$ n'est autre que la droite δ de Longchamps.

(**) L'expression $H_1A'.H_1A_1$ étant positive, nulle ou négative, suivant que H_1 est en dehors du segment A_1A', en A_1 ou entre A_1 et A'. Le rayon du cercle Δ est réel, nul ou imaginaire, suivant que le triangle $A_1B_1C_1$, et par suite ABC, est obtusangle, rectangle ou acutangle (Voir *G. de Longchamps*, J. S. 1886, pp. 59, 85.)

(***) Donc $\theta\theta'$ ou δ, est la polaire de G par rapport à Δ (*G. de Longchamps*, *loc. cit.* p. 100).

(****) Les points A_2, A'' sont, dans ce cas, imaginaires, mais les cercles S_a, M_a et $G\theta$ sont toujours coaxiaux.

$$\rho^2 = \overline{G\theta}^2 = O\theta . \theta H - GO . GH = 2R^2 - 2\overline{GO}^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (*)}.$$

La droite $\theta\theta'$ ou δ étant ainsi l'axe radical des cercles ξ, ξ_1, Δ, Σ, on conclut que :

4° et 6°. Les points α, β, γ sont respectivement les centres radicaux des trois groupes de circonférences

$(\xi, \xi_1, \Delta, \Sigma, S_a, M_a)(\xi, \xi_1, \Delta, \Sigma, S_b, M_b)(\xi, \xi_1, \Delta, \Sigma, M_c, S_c)$.

7° Soient A_3, B_3, C_3 les symétriques des sommets de ABC par rapport à G : ces points sont aussi sur l'ellipse de Steiner. L'hexagone $AC_3BA_3CB_3$ est la projection d'un autre hexagone $ac_3ba_3cb_3$ inscrit au cercle g dont l'ellipse est une projection, et la droite AB_3 étant égale et parallèle à GC, GC_3 on conclut que l'hexagone projeté a ses côtés égaux au rayon et qu'il est régulier. Deux rayons ga et gn, parallèles à bc, sont donc perpendiculaires; donc leurs projections GA, GN sont deux demi-diamètres conjugués. Mais on a :

$$bc = gn\sqrt{3};$$

donc

$$BC = GN\sqrt{3}.$$

De plus le carré ρ' du cercle directeur étant égal à la somme des carrés des demi-diamètres conjugués, on a

$$\rho'^2 = AG^2 + GN^2 = \frac{4}{9}m_a^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = \rho^2.$$

Ce cercle directeur n'est donc autre que Σ.

QUESTION 331

Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

On considère deux cercles Δ, Δ' dont les centres sont les points O, O'. La droite OO' rencontre Δ, Δ', respectivement aux points A, B, A', B'; soient M, M' les extrémités de deux rayons parallèles, de même direction. Cela posé, AM, B'M' se rencontrent en P; BM, A'M' en Q. Démontrer que QP passe constamment par un point fixe.

(G. L.)

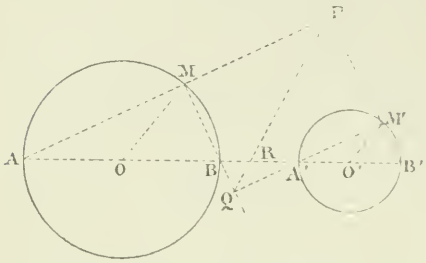
(*) On a aussi :

$$\overline{H_1O}^2 = 2(\overline{H_1O}^2 - R^2) = 2(9\overline{GO}^2 - R^2) = 16R^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Soit R le point de rencontre de PQ et OO′; les triangles semblables RBQ, RB′P donnent

$$\frac{BR}{RQ} = \frac{B'R}{RP}.$$

Les triangles semblables 2RA′, RAP donnent aussi



$$\frac{RQ}{RA'} = \frac{RP}{RA}.$$

Multipliant, on aura

$$\frac{BR}{RA'} = \frac{B'R}{RA};$$

d'où

$$RA'.RB' = BR.RA.$$

C'est-à-dire que la puissance de R, par rapport aux deux cercles, est la même. Le point R appartient donc à l'axe radical des cercles O, O′. Ainsi la droite PQ passe par ce point fixe.

Nota. — Solutions diverses par MM. Svéchnicoff, professeur au Gymnase de Troïtzk; B. Sollertinsky, à Gatschina.

QUESTION 352

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

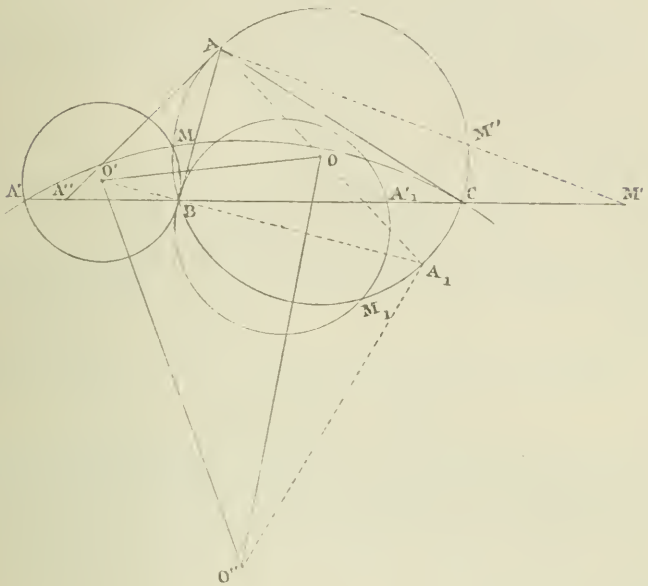
Soit Δ *la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Par un point* M, *pris sur* Δ, *on fait passer deux circonférences, respectivement tangentes aux côtés* AB, AC, *aux points* B, C. *Elles se coupent en un point* A′, *situé sur* BC. *Démontrer cette proposition, et reconnaître que* AA′ *et les droites analogues,* BB′, CC′, *sont concourantes.* (G. L.)

1° Si M est un point de l'arc AB, et si la circonférence Δ′, tangente en B, à AB, rencontre la droite BC en A′, le point A doit être sur le prolongement de CB; et l'on aura

$$\widehat{MA'B} = (\widehat{MBA}) = \widehat{MCA}.$$

Ainsi, la circonférence A′MC est tangente au côté AC, en C. De même, si M appartient à l'arc AC, la circonférence Δ″, tan-

gente en C, à AC, rencontre le prolongement de BC en un point A′ qui appartient aussi à Δ′.



Si l'on suppose enfin que M est sur l'arc BC et que Δ′ rencontre BC en A′, on aura

$$\widehat{BA'M} = \pi - \widehat{MBA} = \widehat{ACM} > \widehat{BCM},$$

d'où l'on conclut que le point A′ est situé entre B et C, et que la circonférence MA′C est tangente, en C, à AC.

2° En désignant l'arc AM par 2α, on a, dans tous les cas

$$\frac{BA'}{BM} = \frac{\sin B}{\sin \alpha},$$

$$\frac{CA'}{CM} = \frac{\sin C}{\sin \alpha},$$

d'où

$$\text{(I)} \qquad \frac{BA'}{CA'} = \frac{BM \sin B}{CM \sin C}.$$

Donc, en observant que l'un seulement des trois points A, B′, C′ est sur le côté même et que les deux autres sont sur les prolongements des côtés de ABC, on a

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1.$$

Par suite, les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes.

Autrement : Soient M_2 l'inverse de M, par rapport à ABC; M′, M″ les points où la droite AM_2 rencontre BC, Δ.

On a
$$\frac{BM}{CM}=\frac{CM''}{BM''};$$
et, d'après (1),
$$\frac{BA'}{CA'}=\frac{CM''\sin B}{BM''\sin C}=\frac{CM''.AC}{BM''.AB}=\frac{CM'}{BM'}.$$

Donc, les points A′, M′ sont isotomiques. Conséquemment :

Les droites AA′, BB′, CC′ *concourent en point* R, *réciproque de* M_2.

Remarques. — **1.** Si l'on suppose BA′ = CA′, on conclut, de (1)
$$\frac{BM}{CM}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AB}{AC}.$$

Donc, *la circonférence passant par le milieu de* BC *et tangente, en* B, *au côté* AB *d'un triangle* ABC, *rencontre la circonférence circonscrite sur la symédiane issue de* A.

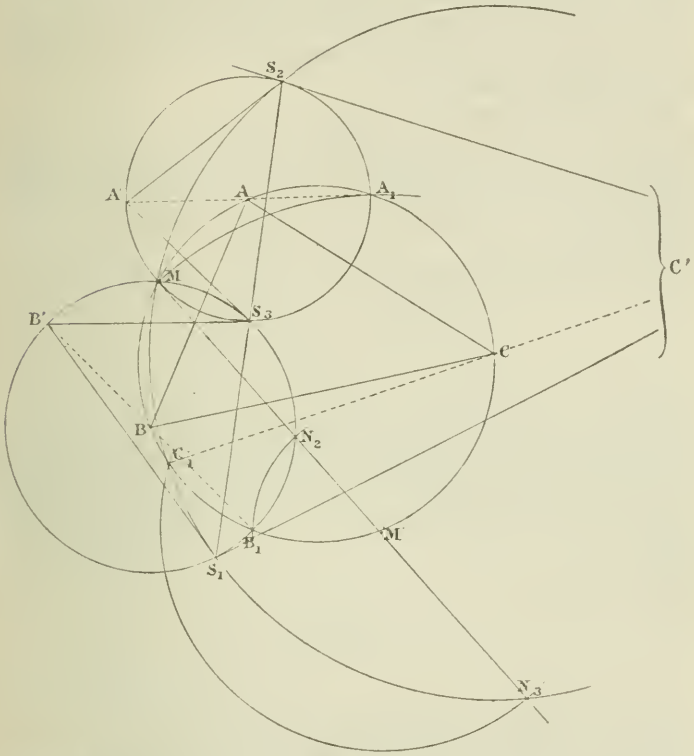
2. — Si la tangente, en A, au cercle circonscrit Δ, rencontre BC en A″, on a
$$\widehat{A''AM}=\widehat{ACM}=\widehat{BA'M},$$
les quatre points A, A′, A″, M sont sur une même circonférence. On a ainsi les propositions suivantes :

Soient AA″, BB″, CC″ *les tangentes, aux sommets d'un triangle* ABC, *au cercle circonscrit;* M *un point quelconque de ce cercle. Si les circonférences* AA″M, BB″M, CC″M *coupent* BC, CA, AB *respectivement en* A′, B′, C′, *les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

Les tangentes aux sommets d'un triangle ABC, *au cercle circonscrit, coupent les côtés opposés en* A″, B″, C″. *Soient encore* A′, B′, C′ *les points isotomiques des intersections des côtés avec les parallèles à une même direction, menées par les sommets opposés. Trois circonférences* AA′A″, BB′B″, CC′C″, *passent par un même point* M, *dont le lieu est la circonférence* ABC.

3. — Soient O, O′, O″ les centres des cercles ABC, A′MB, A′MC; A, le point, sur Δ, diamétralement opposé à A. En con-

sidérant les angles MO′B, MO″C, MOA, on voit aisément que *les cinq points* M, O, O′, O″, A, *sont sur une même circonférence,*



et que M *est le centre de similitude des triangles* ABC, OO′O″, *directement semblables.*

De là, résulte cette proposition :

Des sommets d'un triangle ABC, *comme centres, on décrit trois circonférences,* Δ_1, Δ_2, Δ_3, *qui passent par un même point* M *du cercle circonscrit* Δ.

1° Ces circonférences se coupent deux à deux en points S_1, S_2, S_3, *situés sur une même droite* (*).

(*) D'un point M, appartenant à une circonférence O, l'on mène trois cordes MA, MB, MC ; sur ces droites, prises comme diamètres, on décrit

2° *Si* A′, B′, C′ *sont les points des cercles* Δ_1, Δ_2, Δ_3, *diamétralement opposés à leurs intersections* A_1, B_1, C_1, *avec le cercle* Δ, *les triangles* $A'S_3S_2$, $S_3B'S_1$, S_2S_1C' *sont directement semblables à* ABC, *leur centre de similitude étant en* M; *et deux quelconques des trois cercles* Δ_1, Δ_2, Δ_3, *sont tangentes aux côtés du triangle inscrit dans le troisième.*

3° *Les circonférences concentriques, menées d'un point variable* M′, *pris sur* Δ, *avec les rayons* $M'A_1$, $M'B_1$, $M'C_1$, *coupent respectivement* Δ_1, Δ_2, Δ_3, *aux points* N_1, N_2, N_3, *situés sur une droite qui tourne autour d'un point fixe.* Ce point fixe est M. (Voir question 327.)

QUESTION PROPOSÉE

390. — Si l'on joint le point D′, où la bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC rencontre la circonférence circonscrite Γ, au centre I du cercle inscrit; cette droite D′I rencontre Γ en un second point A′. Démontrer que AA′ passe par le centre de similitude externe des circonférences considérées. (*Lauvernay.*)

ERRATA

P. 5. *Au lieu de* $\rho^2 = \frac{KV - \Sigma u_1 u_2 d_{12}}{V^2}$. *lire* $\rho^2 = \frac{-KV - \Sigma u_1 u_2 d_{12}}{V^2}$.

P. 18, l. 5 (d'en bas). *Au lieu de* rectangles, *lisez* semblables.

P. 19, l. 3. *Au lieu de* sur BC *lisez* sur le côté même.

P. 19, l. 4. *Au lieu de* de ce côté. *lisez* du côté correspondant.

Année 1890, p. 240, l. 4. *Après* la puissance, *ajoutez* changée de signe.

---

trois circonférences, les points P, Q, R, où ces lignes se coupent deux à deux, sont situés sur une même droite. *E. Catalan. Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 41. (Les centres des circonférences sont sur le cercle, décrit sur OM comme diamètre.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4474-2-91.

DES COORDONNÉES ANGULAIRES

Par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

(*Suite* et *fin*, voir p. 52.)

12. — Nous allons rencontrer des triangles tels que les sinus de leurs angles soient connus au signe près, ou, dans d'autres cas, tels que l'on connaisse les tangentes de ces angles : 1° on peut alors *construire* un triangle semblable : car, dans le cas des sinus, les côtés sont proportionnels à des quantités connues ; et, quand on connaît les tangentes, les sinus peuvent être obtenus, au signe près ; 2° *on peut calculer les angles sans ambiguïté*. On trouve, il est vrai, deux valeurs. Mais une des combinaisons doit donner une somme égale à 180° et elle est unique, sans quoi on pourrait construire deux triangles non équiangles et ayant pourtant leurs côtés proportionnels aux mêmes quantités.

13. Théorème (*). — *Soient* M, M′ *deux points inverses. Si, après avoir formé leurs triangles podaires, on les fait tourner en sens contraire d'un même angle* φ, *sans changer leur forme et en les laissant inscrits à* ABC, *les nouveaux triangles restent inscrits au même cercle.*

En effet, le sommet A_1 décrit une perpendiculaire au rayon vecteur initial MA_1. Donc le centre ω du cercle circonscrit décrit aussi une perpendiculaire à son rayon initial $M\omega_1$, c'est-à-dire une perpendiculaire à MM′ en son milieu ω_1. Le centre ω', relatif à M′, décrit la même perpendiculaire que ω, et comme ω et ω' tournent, l'un de φ, l'autre de $-\varphi$, ils coïncident toujours.

14. Corollaire I. — *Réciproquement ; si deux triangles variables sont inscrits à* ABC *et à un même cercle, et que le premier reste semblable à lui-même, il en est de même du second et leurs centres permanents de similitude sont deux points inverses.*

(*) Neuberg, J. E. 1886, p. 153.

Car soit φ l'angle dont le premier triangle a tourné à partir du triangle podaire de M. Si nous faisons tourner de $-\varphi$ le triangle podaire de M', ce triangle coïncide avec le second triangle donné, puisqu'il est à l'intersection des mêmes lignes.

15. Corollaire II. — *En tenant compte de nos conventions de signes, on a toujours, entre les angles correspondants des deux triangles mobiles, la relation*

(5) $A_1 + A'_1 = -A + K.\pi$ $(K = 0 \text{ ou } \pm 1)$ (*).

En effet, si nous amenons les deux triangles à être les podaires de M et M', (5) est la conséquence de (4) et de (L. 11). Pour K, on voit à priori qu'il ne peut dépasser -1. Il ne dépasse pas non plus la quantité $+1$; autrement, les six angles seraient positifs et auraient une somme plus grande que 360°.

Dans les applications, on peut donc calculer A'_1, B'_1, C'_1 **(16)** et dire l'orientation du triangle au moyen des signes de leurs tangentes.

16. — Si l'on déplace, parallèlement à eux mêmes, les côtés de ces triangles, ces côtés restent deux à deux antiparallèles respectivement par rapport à A, B, C et, comme cas particulier, peuvent devenir des droites isogonales formant des triangles circonscrits. Les angles ne changeant pas, les formules ci-dessus s'appliquent à ce genre de triangles.

17. *Triangle en* M. — Par abréviation, nous appellerons ainsi le triangle que forment les trois transversales angulaires de M, lorsqu'on déplace une au moins d'entre elles, parallèlement à elle-même. La méthode du n° **7** montre : 1° *que le triangle en* M, $A_0B_0C_0$, *a une orientation contraire à celle de* ABC, *quand* M *est situé dans un des angles tronqués de* ABC. *Autre-*

(*) M. Taylor a étudié la relation entre ces deux angles dépourvus de signes. L'énoncé (J. E. 1887; p. 107) renferme une inexactitude. Mais M. Vigarié nous a demandé de faire savoir qu'elle est due uniquement, à la traduction d'un passage difficile. Cette traduction dit qu'il n'existe que deux types de formules (pour les angles dépourvus de signes). Or, il existe un troisième type, dans lequel les sommes sont remplacées par des différences. M. Taylor ne s'était pas proposé d'étudier tous les cas. Si on veut établir directement toutes ces formules, il faut examiner trente-trois cas différents, pour les positions des six sommets.

ment, l'orientation est semblable. Le changement d'orientation a donc lieu quand M traverse un côté indéfini de ABC ou la droite de l'infini; 2° *l'angle* A_0 *du triangle a pour valeur*

(6) $$A_0 = -\mathfrak{X} + K\pi, \qquad (K = 0 \text{ ou } \pm 1).$$

$K = +1$, *pour* M *situé à l'intérieur de* ABC *ou dans l'angle opposé à* A; $K = -1$, *dans l'angle tronqué* A; $K = 0$ *dans les trois régions extérieures à* A *ou à son opposé;* 3° *par suite, les tangentes de* $A_0, \ldots$ *sont toujours égales et de signes contraires à celles de* $\mathfrak{X}$; 4° *les sinus ne sont les mêmes qu'au signe près. Le signe est le même lorsque* $K = \pm 1$.

18. — Il suit de 4° que les côtés sont proportionnels à $\lambda\alpha, \ldots$ (p. 39, n° **14**), c'est-à-dire aux côtés du triangle podaire multipliés par x, y, z. D'après 3°, quand on connaît $\mathfrak{X}, \ldots$ on peut construire un triangle semblable à $A_0B_0C_0$ (**12**), calculer ses angles et dire son orientation.

19. — Ce qui rend ce triangle important, c'est qu'*il est semblable à six espèces de triangles déduits de* M; et d'abord on trouve :

1° *Le triangle antipodaire de* M. Il est circonscrit à ABC et a ses côtés perpendiculaires à MA, ... Ses sommets peuvent s'appeler *les conjugués antipodaires* de M. Ce triangle $A_2B_2C_2$ est toujours *directement* semblable au triangle en M.

20. — M et A_2 sont diamétralement opposés sur le cercle latéral de M. Par suite, on a, en désignant par α_1, x_1 des coordonnées absolues,

$$MA_2 = \frac{a}{\sin\mathfrak{X}} = \frac{a\mu\nu}{2\alpha_1} = \frac{\mu\nu}{x_1};$$

et dès lors $MA_2, \ldots$ sont proportionnelles à $\lambda x, \ldots$ c'est-à-dire aux tripolaires $\lambda', \ldots$ de l'inverse de M (*J. S.* 1890, p. 40).

La formule (4) montre que l'angle $B_2MC_2 = A - \mathfrak{X} + K.\pi$.

21. — Les coordonnées normales du sommet A_2 sont

(8) $$\frac{X_a}{-1} = \frac{Y_a(y + x\cos C)}{x + y\cos C} = \frac{Z_a(z + x\cos B)}{x + z\cos B}.$$

On le prouve en établissant que la perpendiculaire BA_2, à BA, a pour équation

(9) $$X(x + z\cos B) = -Z(z + x\cos B).$$

22. — Si M vient se placer sur le cercle circonscrit, il en est de même de A_2. Les formules (8) donnent le moyen le plus simple de déduire le point de Tarry de celui de Steiner.

23. — Les angles A_2, ... sont connus, comme égaux à ceux du triangle en M. Si, dans la formule (6), on change $\mathfrak{X}$ en $-\mathfrak{X}+K'\pi$, on a l'angle A'_0 relatif au point jumeau, et l'on trouve tang $A_0 = -$ tang A'_0. Donc *deux points jumeaux ont des triangles antipodaires symétriquement semblables* (*).

M. Artzt appelle ces triangles : *antipodaires jumeaux*.

24. — Si l'on veut circonscrire à ABC des triangles semblables à PQR, on obtient douze séries. *Chacune a un centre permanent de similitude qui a un de ses triangles pour antipodaire.* Dès lors, on calcule facilement $\mathfrak{X}$ pour ces points (6). Ce sont les inverses des centres relatifs aux triangles inscrits (**8**).

25. — On a pour A_2

$$(10)\quad \rho_2 \text{ ou } A_2B = \mu \operatorname{cotg} BA_2M = \mu \operatorname{cotg} BCM = \mu\left(\cot C + \frac{\alpha^2\beta}{2S\alpha}\right);$$

Par suite, le côté B_2C_2 qui, pour M intérieur à ABC, égale $AB_2 + AC_2$, a finalement pour valeur

$$(11)\qquad B_2C_2 = \frac{\lambda\Sigma a^2\beta\gamma}{2S\beta\gamma}.$$

Vérification : les trois côtés sont proportionnels à $\lambda\alpha$. ... (**18**).

26. — L'aire de $A_2B_2C_2$ égale

$$(12)\qquad S_2 = \frac{(\Sigma a^2\beta\gamma)^2}{4S\sigma\alpha\beta\gamma}.$$

Car $S_2 = \frac{1}{2} A_2C_2 . A_2B_2 \sin \mathfrak{X}$, et si $\mathfrak{X}$ est donné par la formule 14 de la p. 39.

27. — La formule générale de l'angle de deux droites donne l'angle des directions MA, BC. On a

(13)

$$\cot(A'MA, BC) = \frac{\beta \operatorname{cotg} B - \gamma \operatorname{cotg} C}{\beta+\gamma} = \frac{\beta \operatorname{cotg} \mathfrak{Y} - \gamma \operatorname{cotg} \mathfrak{Z}}{\beta+\gamma}.$$

(*) On a cet énoncé de M. Neuberg : les points jumeaux sont les sommets de faisceaux aboutissant à A, B, C et symétriquement égaux. (*Des projections*, p. 19.)

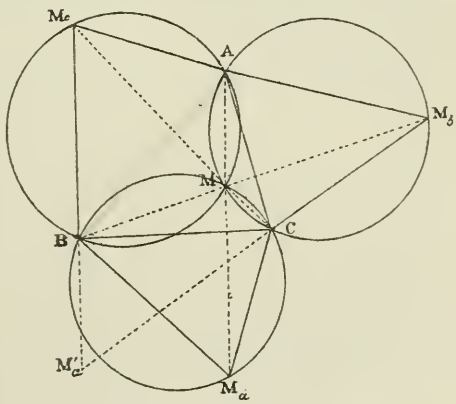
En prenant le complément de cet angle, on a l'angle de B_2C_2 et de BC. En recourant à l'inverse de M, on a de même l'angle de BC et du côté B_1C_1 du triangle podaire de M.

28. — 2° et 3°. *Le triangle en* M *est directement semblable au triangle podaire de l'inverse* M′ *de* M *et à son homothétique, signalé plus haut* (§ **11**). Car ce triangle relatif à M′ est homothétique de l'anti-podaire de M. On sait, en effet, que deux côtés correspondants à A sont perpendiculaires à AM.

4° *Par suite, le triangle en* M *est directement semblable au triangle inscrit dans le cercle* ABC *et obtenu en prolongeant* AM′,... (J. S. 1890, p. 7).

5° *Il en est de même du triangle de Lionnet du point* M. M. Neuberg (*) appelle ainsi le triangle dont les sommets sont les centres des cercles MBC, ... Il est homothétique de l'anti-podaire.

29. — 6° Enfin le triangle en M est *symétriquement* semblable aux triangles tels que BCM_a, dont le sommet M_a s'obtient en cherchant la seconde intersection du cercle MBC avec AM. Par suite, on connaît leurs angles. *Les tangentes sont toujours égales et de signes contraires à celles de* $\mathfrak{A}$, ... Les sinus sont égaux, au signe près. *L'angle correspondant à* $\mathfrak{Y}$ *est situé en* B.



Empruntant une expression proposée par M. Neuberg (*Sur les projections*, p. 13), nous appellerons ces figures les *triangles annexes* de M. Les sommets M_a, ... seront les *points annexes* de M.

(*) *Sur les projections*. Bruxelles, Hayez. 1890.

Pour ces triangles, notre convention de signes (**5**) revient à regarder leurs angles comme des coordonnées angulaires de M_a, ...

30. — Il suit de là que *les trois triangles annexes de* M *sont semblables entre eux et de même signe*, et par suite qu'*ils sont semblablement placés par rapport aux côtés de* ABC, c'est-à-dire tournés tous vers l'intérieur ou tous vers l'extérieur.

Deux à deux, ils ont A, B, C pour centres de rotation. Ils sont donc autrement disposés que les trois triangles semblables qu'on étudie au sujet de l'hyperbole de Kiepert (J. S. 1886, p. 75) et qui ont BC,... comme côtés homologues.

31. *Utilité des triangles annexes.* — Quand M est donné par $\mathfrak{X}$.... ou par les tangentes de ces angles, on pourrait construire M par des arcs de cercle. Les triangles annexes permettent de construire directement les transversales angulaires de M. C'est à cette méthode que revient la construction habituelle des points de Brocard et des centres isogones.

Quant aux triangles annexes, on les a, comme forme et orientation, puisque l'on connaît ces deux éléments pour le triangle en M (**18**).

32. *Coordonnées barycentriques de* $M_a(\alpha', \beta', \gamma')$. — Si l'on pose

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\rho} \tag{14}$$

et qu'on cherche l'intersection de AM et du cercle MBC, on trouve

$$\rho = -\frac{a^2\sigma\beta\gamma}{\Sigma a^2\beta\gamma}. \tag{15}$$

33. — Comme M est un des points annexes de M_a, on déduit M de M_a par des formules analogues à (14).

34. — Le théorème de Ptolémée donne

$$MM_a = \frac{\mu^2\beta + \nu^2\gamma}{\lambda\alpha}. \tag{16}$$

35. — On a, au signe près, pour les coordonnées tripolaires de M_a,

(17) $$AM_a = \frac{\sigma P}{\lambda\alpha},$$

(18) $$CM_a = \frac{\alpha\mu\beta}{\lambda\alpha}.$$

(18) résulte de (**29**) ; (17) s'obtient en prenant MBC pour triangle de référence et appliquant la formule 7 de la p. 38. On trouve ainsi l'expression du produit $AM.AM_a$.

36. — Il résulte de là (*M.* 1886. p. 212) que : 1° AM_a, BM_b, CM_c sont inversement proportionnelles à $\lambda\alpha$,... c'est-à-dire aux côtés du triangle en M ; 2° les couples de triangles tels que ABM_b, ACM_c ont les côtés proportionnels.

37. — On peut concevoir des points annexes du second ordre M_a^2,... et ainsi de suite, en prenant $M_aM_bM_c$ pour triangle fondamental. *Les nouveaux triangles annexes sont semblables aux anciens et semblablement orientés.* Car, de M, on voit encore, sous les angles $\mathfrak{A}$,..., les côtés du nouveau triangle fondamental.

Si l'on applique le théorème de Ptolémée au quadrilatère $MM_a^2M_bM_c$, on obtient MM_a^2, puis AM_a^2, et l'on trouve que M_a^2 *est le symétrique de* M_a *par rapport à* A (M. 1886, p. 111). De même M_a^3 *est le symétrique du précédent* M_a^2 *par rapport à l'antéprécédent ;* et ainsi de suite. Cela permet d'obtenir les coordonnées barycentriques de ces points.

38. — Les douze associés angulaires qui ont des triangles podaires semblables à PQR ont des triangles annexes semblables, mais ils ont tous des dispositions différentes sur BC.

39. — Le calcul montre que *les points annexes* M_a, M'_a *de deux points inverses sont eux-mêmes des points inverses.* Dès lors, pour les obtenir, il suffit de prolonger deux à deux les côtés des triangles annexes de M (Neuberg, *M.* 1886, p. 212).

40. — M. Morgan Jenkins (*ibid.*) a établi que *les droites* $M_aM'_a$,... *sont toutes parallèles à* MM' ; ce qui est un cas partilier de (**3**). Cela permet de déduire $M_aM'_a$ de MM'. On a (17)

(19) $$\frac{M_aM'_a}{MM'} = \frac{AM}{AM_a} = \frac{\lambda^2\alpha}{\sigma P}.$$

LES PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE, EN 1890;

Par M. **E. Vigarié.**

(*Suite* et *fin*, voir p. 56.)

10. Paraboles de Mandart. — Soient ABC un triangle quelconque, A′, B′, C′ les milieux des côtés, I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle.

Prenons sur BA, CA, d'un même côté de BC, les segments $BM = CN = \lambda$;

Sur CB, AB, d'un même côté de CA, les segments $CM_1 = AN_1 = \lambda_1$;

Sur AC, BC, d'un même côté de AB, les segments $AM_2 = CN_2 = \lambda_2$.

Appelons d_a, d_b, d_c les trois transversales MN, M_1N_1, M_2N_2.

Les transversales d_a, d_b, d_c enveloppent des paraboles M_a, M_b, M_c. Ce sont celles qui ont été étudiées par M. Mandart (*Sur un groupe de trois paraboles*, M., pp. 30-33).

1. *La parabole* M_a *touche* AB, AC *en des points* m, n. *La droite* mn *est parallèle à la bissectrice* AI. *Le sommet* S_a *est au milieu* p *de* mn.

2. *Elle est inscrite au triangle* ABC; *son foyer est le point de rencontre du cercle circonscrit et de l'axe* AS_a. *La directrice est parallèle à* AI *et elle passe par l'orthocentre* H.

3. *La parabole* M_a *a, pour équation barycentrique :*

$$\alpha^2(b-c)^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+2b(b-c)\alpha\beta-2c(b-c)\alpha\gamma+2bc\beta\gamma=0.$$

4. *Si* I′ *et* O′ *sont les centres du cercle inscrit et des cercles circonscrits au triangle* $I_aI_bI_c$, *la tangente au sommet* S_a *est la droite* A′I′. *Les points* H, I′, O′ *sont trois points en ligne droite;* I *est au milieu de* HO′. *Les cordes de contact* mn, m_1n_1, m_2n_2 *concourent au point symétrique de* I *par rapport à* I′.

M. Mandart donne plusieurs propriétés des transversales d_a, d_b, d_c et d'un second groupe de trois paraboles qui présentent de grandes analogies avec les précédentes.

11. Coniques remarquables. — M. Boutin a étudié un groupe de quatre coniques, sont les transformées par points inverses des droites qui joignent le centre du cercle circonscrit O aux centres des cercles tangents aux côtés du triangle (*Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan*

d'un triangle. J.S. pp. 104-107, 124-127). Ces quatre coniques, désignées par (B), (B_a), (B_b), (B_c) donnent lieu aux propositions suivantes :

1. A_1, B_1, C_1 *étant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de* ABC, *si l'on porte dans le même sens, sur* IA_1, IB_1, IC_1, *les longueurs* $IA_2 = IB_2 = IC_2 = l$; *les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *sont concourantes. Le lieu de leur point de concours est la conique* (B).

On a des théorèmes analogues quand on remplace le centre du cercle inscrit par l'un des centres des cercles ex-inscrits.

2. *Si un triangle se déforme de manière à rester à la fois inscrit et circonscrit à deux cercles fixes, la droite qui joint son point de Nagel à son point de Gergonne pivote autour d'un point fixe de la ligne des centres. Dans le même mouvement le premier réciproque du point de Nagel de tous ces triangles est fixe.*

12. Cubiques. — En 1889, M. Boutin avait donné une Note *sur les cubiques remarquables du plan du triangle* (J.S., p. 265). Nous avons complété cet article par l'indication (*Note bibliographique sur les cubiques*, *J.S.*, 1890, pp. 63-69) de quelques renseignements bibliographiques. Notre Note est suivie d'une communication de M. Boutin (pp. 67-69) sur les cubiques étudiées l'année précédente.

Dans des *Problèmes sur le triangle* (J.S., 1890, pp. 265-269) M. Boutin est revenu sur ce sujet. Il donne les propositions suivantes :

1. *On considère, dans le plan du triangle* ABC, *un point* M *dont les coordonnées normales sont :* x', y', z'. *Sur les projetantes orthogonales de* M *et dans un même sens, on porte les longueurs* $MA' = Kx'$, $MB' = Ky'$, $MC' = Kz'$. *Déterminer* K *de manière que les droites* AA′, BB′, CC′ *soient concourantes. Déterminer les points* M *tels que ces droites concourent quel que soit* K. *Le lieu du point de concours quand* M *coïncide avec le centre du cercle circonscrit* O *est la cubique des inverses relative à l'orthocentre.*

2. *On considère un point* M *dans le plan d'un triangle; de ce point, sur des perpendiculaires aux côtés et dans un même sens, on porte des longueurs* $MA' = Kx_1'$, $MB' = Ky_1'$, $MC' = Kz_1'$ (x_1', y_1', z_1'), *étant les coordonnées d'un point quelconque* P. *Déterminer* K *de manière que les droites* AA′, BB′, CC′ *soient concourantes.*

3. *Une droite quelconque coupe la droite d'Euler en un point dont le paramètre est* K_1 *et l'hyperbole de Jérabek en deux points dont les paramètres sont :* K_2, K_3, *Il existe entre* K_1, K_2, K_3, *la relation :*

$$1 + K_1K_2K_3 \cos A \cos B \cos C = 0,$$

Comme cas particuliers, on a les deux propriétés suivantes :

4. *La droite qui joint deux points de l'hyperbole de Jerabek, dont les paramètres ont un produit constant, rencontre la droite d'Euler en un point fixe* P.

5. *La droite qui joint un point quelconque de la droite d'Euler à un point de l'hyperbole de Jerabek, choisi de manière que le produit des paramètres soit constant, rencontre la courbe en un second point fixe* P_2.

L'article de M. Boutin est suivi d'une intéressante Note de M. Neuberg (pp. 269-270).

La multiplicité des travaux provoqués par la Géométrie du triangle, et le manque d'espace, nous obligent à signaler seulement les *Propriétés du triangle* (J. E., 1890, pp. 73-77, 97-99) de M. Bénézech et la *Théorie des triangles caractérisés* (J. E., 1890, pp. 203-206, 234-237, 252-256) de M. de Longchamps. L'auteur appelle ainsi les triangles dans lesquels les côtés a, b, c vérifient une relation telle que

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0.$$

13. Généralisations. — Divers efforts ont été tentés pour généraliser la Géométrie du triangle, et l'appliquer, par des transformations convenables, aux polygones plans et aux figures à trois dimensions. Nous mentionnerons, à ce propos, deux Mémoires publiés dans *Mathesis*.

1° *Complément à la théorie des polygones harmoniques, par M. J. Casey* (M. pp. 96-104).

2° *Sur le tétraèdre orthocentrique, par M. de Longchamps* (M. pp. 49-53, 77-82).

Nous rappellerons aussi que nous avons publié, nous-même, dans les *Comptes-rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Paris) une *Esquisse historique sur la marche des développements de la Géométrie du triangle*, dans laquelle nous avons essayé de résumer les progrès de cette science depuis son origine.

Citons, pour terminer, deux ouvrages parus récemment :

1° *Géométrie élémentaire récente*, par M. J. Casey. 80 pages in-8°. C'est la traduction, par M. Falisse, du chapitre supplémentaire de *A Sequel to Euclid*, paru dans *Mathesis* (janvier 1889). L'ouvrage contient le complément à la théorie des polygones harmoniques (*M.*, avril 1890). La préface, due à M. Neuberg, signale les principaux promoteurs de la Géométrie du triangle.

2° *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze*, par M. W. Fuhrmann. 190 pages et 14 planches, livre analysé dans ce journal (1890, p. 160).

VARIÉTÉS

ESSAI SUR UN PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (A)

Par M. **Humbert**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite* et *fin*, voir p. 59.)

Courbes usuelles. — Ellipse.

35. — Premières propriétés de l'ellipse; définition de la courbe, axes de symétrie centre. — Tracé d'un mouvement continu. — Premier tracé par points; en déduire x et y en fonction d'une variable t; équation de l'ellipse.

36. — Intersection de l'ellipse avec les droites passant en l'un des foyers, cercles directeurs des foyers. — Deuxième tracé par points. — L'ellipse est le lieu des points équidistants d'un cercle et d'un point intérieur. — Déduire de ce qui précède que l'ellipse est une courbe fermée et continue, sans point double, sans point de rebroussement. — Points intérieurs, points extérieurs à l'ellipse. — Intersection de l'ellipse avec une droite rencontrant le grand axe entre les foyers, et, en particulier, avec une droite quelconque, passant par le centre. — Intersection de l'ellipse avec une droite laissant les foyers d'un même côté, point pour lequel $MF + MF'$ est minimum. — Considération du symétrique d'un foyer par rapport à une droite donnée. — D'après la position de ce point, diviser les droites du plan en groupes, sécantes, non sécantes et tangentes. — Trouver les points de rencontre d'une droite avec une ellipse; discussion, examen de divers cas particuliers.

37. — Tangente. — Propriété fondamentale de la tangente à l'ellipse; existence de cet élément; diverses démonstrations. — La tangente est tout entière à l'extérieur de l'ellipse, sauf le point de contact; l'ellipse est une courbe entièrement convexe; elle tourne sa concavité vers les foyers. — Lieux des symétriques des foyers par rapport aux tangentes, des projections des foyers sur les tangentes, cercle principal de l'ellipse. — Relation qui existe entre le point de contact, les projections des deux foyers sur une tangente et le point de rencontre de cette droite avec le grand axe. — Normale, position de la normale, normales et tangentes au sommet. — Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque est constant. — Propriétés métriques de la normale, corde des pieds des deux normales menées par un point d'un axe.

38. — Mener à l'ellipse des tangentes parallèles à une direction donnée, diamètre des points de contact, tangentes parallèles à ce diamètre, diamètres conjugués (première définition).

39. — Mener, par un point, des tangentes à l'ellipse; deux méthodes, discussion. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse. — Propriétés angulaires du couple de tangentes issues d'un point. — La portion de tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est vue de l'un des foyers sous un angle dont le sinus est constant.

40. — Cas où la corde des contacts des tangentes fixes passe au foyer. — Rapport anharmonique de quatre tangentes à une ellipse. — Les segments interceptés sur deux tangentes fixes par une tangente mobile vérifient la relation $I'M'.JM = C^{te}$. — Cas de deux tangentes parallèles, $AM.A'M' = rr' = C^{te}$, A et A' étant les points de contact. — Relations entre les demi-axes, a et b, et les demi-diamètres conjugués, α et β; théorèmes d'Appolonius. — Position du point de contact sur la tangente mobile, $\frac{MP}{M'P} = -\frac{AM}{A'M'}$; coordonnées obliques du point de contact, par rapport aux axes $o\alpha$ et $o\beta$, équation de l'ellipse dans ce système d'axes; chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, — Pôle et polaire, définition spéciale permettant de montrer la réciprocité, propriétés d'un système de diamètres conjugué. — Segments interceptés sur une tangente fixe par deux diamètres conjugués quelconques. points d'où l'on voit ces segments sous un angle droit. — Problème de Chasles. — Réciproques des relations segmentaires qui sont la base de cette théorie. — Cas particuliers des tangentes aux extrémités des axes, réciproques dans ces cas. — Parallélogramme inscrit, parallélogramme circonscrit. — Propriétés ponctuelles analogues aux précédentes, réciproques. — Rapport anharmonique de quatre points d'une ellipse.

41. — L'ellipse est la projection orthogonale de son cercle principal; elle a pour projection le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre. — Homologie par affinité entre l'ellipse et l'un de ces cercles. — Théorie géométrique de l'ellipse envisagée comme projection orthogonale du cercle; divers problèmes; en particulier, diamètres conjugués, propriétés diverses d'un système de diamètres conjugués, etc. — Propriétés des pôles et polaires dans l'ellipse. — Foyers, directrices, propriétés diverses de ces éléments. — Réciproque : l'ellipse est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe et à une droite fixe soit un nombre constant, plus petit que l'unité, etc.

42. — Des sections elliptiques du cône oblique à base circulaire. — Cas des sections cycliques. — L'ellipse est, d'une infinité de manières, la projection conique ou oblique d'un cercle. — Des sections elliptiques du cône à base elliptique, etc.

Hyperbole.

43. — Programme général de l'ellipse. — Examen détaillé de l'intersection de la courbe avec une droite; intérêt particulier de ce problème. — Division des directions du plan en deux groupes, celles qui rencontrent les deux branches de courbe, celles qui ne rencontrent qu'une seule branche ou qui ne rencontrent pas la courbe. — Directions asymptotiques, etc. — Utilité des projections coniques pour l'étude des propriétés des pôles et des polaires. — Montrer que cette méthode peut s'appliquer à l'ellipse.

Parabole.

44. — Définition. — Premières propriétés, sommet, axe. — Tracé de la courbe d'un mouvement continu; la parabole est une courbe continue. — Intersection de la courbe avec les droites perpendiculaires à l'axe, avec les

parallèles à l'axe. — Divers tracés par points. — Intersection de la courbe avec les droites passant au foyer. — Intersection avec une droite quelconque. — Diamètre conjugué d'une direction donnée. — Points intérieurs, points extérieurs.

45.—Tangente, propriété fondamentale de la tangente; la tangente, abstraction faite du point de contact, est tout entière à l'extérieur de la parabole; la parabole est une courbe entièrement convexe. — Lieu des symétriques du foyer par rapport aux tangentes. Lieu des projections du foyer sur les tangentes. — Lorsqu'un angle droit est tel qu'un de ses côtés passe par un point fixe et que son sommet glisse sur une droite fixe, le second côté enveloppe une parabole. — Sous-tangente, normale, sous-normale; propriétés réciproques. — Équation de la parabole; réciproque. — Triangle circonscrit à une parabole. — Construire une parabole tangente à quatre droites données.

46.—Mener, à une parabole une tangente parallèle à une direction donnée, diamètre de cette direction. — Mener, à une parabole, des tangentes par un point donné; diverses méthodes, discussion. — Propriétés angulaires du couple de tangentes issues d'un point. — Lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une parabole, cas de l'angle droit. — La portion d'une tangente mobile, comprise entre deux tangentes fixes, est vue du foyer sous un angle constant. — Réciproque générale de cette propriété. — Une tangente mobile décrit sur deux tangentes fixes des segments proportionnels. — Réciproque. — Propriétés métriques relatives à un point, au diamètre qui passe en ce point et à la corde des contacts. — Si un point se meut sur une perpendiculaire à l'axe, le produit des segments interceptés par les deux tangentes issues de ce point sur la tangente au sommet est constant. — Réciproque. — Relation entre le segment compris entre le point de contact d'une tangente fixe et une tangente mobile et l'angle des deux droites, $AM = \frac{AF \sin \varphi}{\sin (\theta + \varphi)}$. — Réciproque. — Importance de cette relation au point de vue projectif. — Equation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité. — Si on coupe un cône oblique à base circulaire par un plan parallèle à un plan tangent, la section est une parabole. — La parabole peut être considérée d'une infinité de manières comme étant la projection conique d'un cercle. — Sections planes du cône à base circulaire, du cône à base elliptique, du cône à base hyperbolique, du cône à base parabolique; ces trois derniers cônes se ramènent à un seul.

47. — Pôles et polaires dans la parabole. — Propriétés harmoniques du foyer et de la directrice. — Rapport anharmonique de quatre tangentes à une parabole; rapport anharmonique de quatre points. — Etablir directement ces dernières propriétés, sans considérer la parabole comme projection conique d'un cercle. — La parabole peut être considérée comme la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole.

48. — Homothétie et similitude dans l'ellipse, l'hyperbole et la parabole. — Lieu des intersections successives de deux rayons correspondants, dans deux faisceaux projectifs. — Enveloppe des droites qui joignent les points correspondants de deux séries projectives.

Sphère.

49. — Définition. — Premières propriétés ; grand cercle, points intérieurs, points extérieurs à la sphère. — Intersection d'une sphère et d'un plan, plans sécants, plans non sécants, plans tangents, petit cercle, pôle d'un petit cercle, rayon sphérique, angle de deux cercles, cercles se coupant à angle droit sur la sphère. — Intersection de la sphère avec une droite, sécantes, non sécantes, tangentes. — Tangente à la sphère, plan tangent. — Rayon d'une sphère solide. — Définition de la distance de deux points sur la sphère (on justifiera plus loin cette définition). — Puissance d'un point par rapport à une sphère. — Propriétés des plans radicaux et des axes radicaux. — Centre radical de quatre sphères. — Sommets des deux cônes qui passent par deux cercles. — Centre de similitude, propriétés analogues à celle des points anti-homologues de deux cercles du plan. — Plan polaire d'un point. — Points conjugués. — Droites polaires, triangles polaires, tétraèdres polaires. — Positions relatives de deux cercles de la sphère par la considération de leur axe radical dans l'espace. — Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère. — Triangle sphérique, ligne brisée sphérique, polygone sphérique. — Propriétés élémentaires du triangle sphérique. — Triangles symétriques, triangles isoscèles, triangles rectangles, triangles birectangles, triangle trirectangle. — Lieu des points équidistants de deux points donnés. — Rayon d'une sphère solide. — Propriétés du triangle isoscèle. — Faire passer un cercle par trois points. — Faire passer un grand cercle par deux points. — Cas d'égalité des triangles sphériques. — Propriétés du triangle rectangle. — Cas d'égalité des triangles sphériques rectangles.

50. — Triangles polaires, propriétés de ces triangles. — Dualité sur la sphère, points harmoniques, diverses propriétés des triangles sphériques. — Construction des triangles sphériques. — Examen de divers cas ; discussions qui s'y rapportent.

51. — Aires. — Aire du fuseau. — Aire du triangle sphérique. — Aire du polygone sphérique. — Théorème de Lexell.

52. — Faire passer une sphère par quatre points. — Reconnaître s'il y a une sphère passant par deux cercles donnés. — Mener par un cercle une sphère tangente à un plan donné. — Sphères tangentes à quatre plans donnés, discussion. — Projection stéréographique. — Divers problèmes concernant les cercles de la sphère. — Mener un cercle tangent à trois cercles donnés. — Propriétés diverses d'un système de deux cercles ou de trois cercles, etc. — Mener une sphère tangente à quatre sphères données. — Propriétés des figures inverses, particulières à la sphère, etc.

N. B. — Plusieurs points de ce programme (pour éviter des longueurs de rédaction) n'ont pas été détaillés ; en outre, en plusieurs endroits, de légères modifications peuvent, sans inconvénient, être apportées dans l'ordre des propriétés énoncées.

Nous avons voulu, uniquement, indiquer l'ensemble des propriétés qui nous paraissent former les matières de l'enseignement des mathématiques dans une classe dont le but est de préparer des élèves, déjà bacheliers, à entrer dans un cours de mathématiques supérieures.

CORRESPONDANCE

Monsieur le Rédacteur,

Il y a deux points du programme que vous venez de publier dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* sur lesquels je dois appeler l'attention des lecteurs, pour éviter toute confusion.

D'abord, dans le paragraphe 26, on lit : *Changement d'origine sur un axe d'abscisses. — Montrer qu'un pareil changement n'altère pas les deux éléments d'un couple de points.* Il faut entendre par là qu'un changement de ce genre n'altère pas le point milieu, ni la distance de ce point aux deux points, réels ou imaginaires, du couple : il ne peut pas être question de la puissance de l'origine par rapport à ce couple, laquelle change évidemment, en subissant, dans tous les cas, la même transformation algébrique, que les points soient réels ou non.

Puis, dans le paragraphe 27 : *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés, etc.* Cette question est là mal à sa place. Je la traite, dans mon cours, après les figures inverses, et elle ne peut être bien exposée qu'à ce moment. La même remarque s'applique au problème analogue dans la géométrie de la sphère.

Agréez, Monsieur le Rédacteur, l'assurance de ma parfaite considération.

E. Humbert.

BIBLIOGRAPHIE

Supplement to Euclid Revised, par M. J. Nixon. *Charendon press. Oxford*, 1891. Prix : six pence = 0 fr. 60.

La brochure que nous signalons aujourd'hui forme un chapitre supplémentaire de *Euclid Revised* du même auteur. Peu étendue (28 pages) et d'un prix minime, elle sera lue avec avantage par tous ceux qui, n'étant pas au courant de la Géométrie du triangle, désirent en connaître les notions les plus générales. Ce chapitre est, en effet, une introduction à la géométrie récente. Les démonstrations qu'il contient sont élémentaires et nouvelles pour la plupart.

M. Nixon donne successivement les *principales* propriétés des antipa-

rallèles, symédianes, point de Lemoine, points inverses, point de Gergonne; cercles de Brocard, de Tucker, de Lemoine, de H. M. Taylor et des triangles de Brocard.

Comme on le voit, par les citations que nous venons de faire, l'ouvrage ne contient que ce qu'il y a de plus nécessaire, mais il était impossibe à l'auteur de mieux faire quand on songe qu'il avait pour but de traiter ces questions élémentairement, sans emprunter le secours de l'Analyse. Peut-être l'auteur aurait-il pu, néanmoins, y introduire la notion des points réciproques et des transversales réciproques, qui jettent tant de lumière dans la Géométrie du triangle.

Telle qu'elle est, nous croyons que la brochure de M. Nixon, qui sert d'introduction aux traités de MM. Casey et Milne sur le même sujet, rendra de réels services à tous ceux qui désirent se familiariser avec l'étude de la Géométrie du triangle. L'ouvrage est imprimé en beaux caractères, et de nombreuses figures, bien gravées, intercalées dans le texte en facilitent la lecture. E. VIGARIÉ.

Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'Ecole de Saint-Cyr et des élèves de mathématiques élémentaires qui se destinent aux mathématiques spéciales; par A. MACÉ DE LÉPINAY, ancien élève de l'Ecole normale, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

On sait que les programmes d'admission à l'Ecole de Saint-Cyr ont été récemment remaniés, et qu'on y a introduit, ce qui était indispensable, des compléments d'algèbre, permettant d'atteindre et de développer l'idée vraie des valeurs limites, et aussi, mais peut-être le besoin de cette autre transformation était-il moins urgent, quelques notions de Géométrie analytique (*).

(*) Pourtant, ces notions nous paraissent avoir, dans les mathématiques élémentaires, une application importante que le programme eût pu indiquer explicitement.

Dans un grand nombre de problèmes, les équations que l'on considère renferment deux paramètres variables α, β, et la discussion porte sur une ou plusieurs inégalités, telles que :

$$f(\alpha, \beta) > 0,$$

$f(\alpha, \beta)$ représentant, quand on l'égale à zéro, et quand on suppose que α, β représentent des coordonnées courantes, une fonction de premier degré; du second degré, dans d'autres cas; ou enfin, dans les cas les plus difficiles, une fonction d'un degré supérieur, mais peu compliquée.

En construisant la courbe qui correspond à l'équation $f(\alpha, \beta) = 0$, et les autres courbes analogues, on sépare le plan en *régions positives ou négatives* et la discussion se trouve singulièrement facilitée par cette représentation géométrique.

On peut aussi, pour la solution même des problèmes à deux inconnues u, v, problèmes conduisant à deux équations

$$f(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0,$$

s'aider de la construction des courbes correspondantes. Nous avons donné dans le *Bulletin scientifique* de M. Lebon, année 1889, sous le titre : *Applications élémentaires des premiers principes de la Géométrie analytique*, plusieurs applications de l'idée, toute naturelle et très connue que nous venons de rappeler.

L'ouvrage que M. Macé de Lépinay vient de publier à la librairie Nony a pour but de répondre aux besoins soulevés par ce nouveau programme.

Le premier fascicule est consacré aux compléments d'Algèbre. Il renferme : *les définitions et l'exposition des principes relatifs à la continuité; une théorie élémentaire des fonctions dérivées, avec l'application à l'étude de la variation des fonctions simples.* Nous signalons tout particulièrement dans ce fascicule le chapitre consacré à la fraction du premier degré et à celle du second degré. La discussion de la variation de ces fractions, qui n'occupe pas moins de 36 pages (§§ 120 à 143), est faite avec un soin minutieux et se trouve éclairée par des exemples numériques nombreux.

Le second fascicule renferme les *Notions de Géométrie analytique*; il est divisé en trois chapitres portant, respectivement, sur : les *généralités des coordonnées cartésiennes* (transformation des coordonnées, classification des courbes planes); *la ligne droite* (diverses formes de l'équation de la droite, angles et distances, tangentes et asymptotes); et *les courbes du second degré* (classification, réduction; identité des courbes du second degré avec les courbes usuelles).

On sera frappé certainement de l'ordre et de la grande clarté qui règnent dans l'ouvrage de M. Macé de Lépinay, qualités qu'on ne trouve ordinairement, à ce degré du moins, que dans les livres ayant pour auteurs des hommes qui ont longtemps professé les matières sur lesquelles ils écrivent.

Applications remarquables du théorème de Stewart, et théorie du barycentre, par Clément Thiry, professeur de mathématiques. — Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Augustins. Prix : 2 francs.

Il y a quelques années (*) en rendant compte d'une brochure de M. Clément Thiry, nous avons eu occasion de le louer du parti qu'il avait tiré du théorème de Stewart, l'un des plus puissants de la Géométrie élémentaire, théorème duquel Chasles disait (**) en 1837. « Cette proposition, à peu près inconnue de nos jours, mériterait bien de prendre place dans les éléments, ou au moins, dans les compléments de Géométrie ». Pour l'observer en passant, le vœu que Chasles formulait alors, est aujourd'hui exaucé, mais une brochure aussi intéressante que celle que M. Clément Thiry vient d'écrire est bien faite pour mettre en lumière toute la puissance du théorème de Stewart.

L'ouvrage de M. Clément Thiry, exception faite des applications classiques du théorème de Stewart, applications déjà signalées dans sa brochure de 1837, est une exploitation très heureuse de ce théorème, au profit de la Géométrie du triangle. On sait le rôle important que jouent les relations métriques dans cette partie de la Géométrie. On trouvera, dans le livre en question, un recueil précieux de formules permettant, notamment, de calculer les longueurs de segments ayant pour extrémités deux points remarquables du triangle. Un grand nombre de ces relations découlent d'une formule générale dont l'auteur signale, avec raison, la fécondité et qu'il propose d'appeler l'*omniformule métrique du triangle*; nous allons la faire connaître.

(*) Voyez *Journal*, 1887, p. 45.

(**) *Aperçu historique*, p. 176.

En désignant par K_n le point que nous avons appelé (*) le *potentiel d'ordre n*, P étant d'ailleurs un point quelconque, on a

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{a^n PA^2 + b^n PB^2 + c^n PC^2}{a^n + b^n + c^n} - \left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n}\right)^2 (^{n-2}b^{n-2} + a^{n-2}c^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2})$$

Les développements auxquels donne lieu cette formule sont des plus intéressants, et ils forment un ensemble digne d'être tout particulièrement remarqué. Cette partie du livre de M. Clément Thiry sera d'ailleurs, si nous sommes bien informé, insérée dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*.

Un dernier chapitre est consacré à l'étude du centre des distances proportionnelles ou *barycentre*, d'un système de points. L'ouvrage se termine par des exercices fort intéressants et, à ce qu'il nous a semblé, nouveaux, pour la plupart.

Nous appelons l'attention de nos lecteurs sur ce livre que nous regrettons de ne pouvoir, faute de place, analyser plus en détail; ils y trouveront de nombreuses propriétés, très heureusement groupées autour de ce remarquable théorème de Stewart dont elles font ressortir, une fois de plus, l'admirable fécondité. G. L.

NOTE SUR LA QUESTION 318 (*)

Par M. **Bernès.**

Cette question n'est, dans sa partie principale, qu'un cas particulier du théorème suivant :

Si un point M, *mobile dans le plan d'un triangle* ABC, *est projeté en* P, Q, R *sur les côtés de ce triangle, et que, sur une base fixe (sur* BC, *par exemple), considérée comme homologue de* QR, *on construise un triangle* SBC, *semblable à* PQR, *la ligne décrite par* S *est égale à l'inverse, relativement au point* A, *de la ligne décrite par* M.

Considérons en effet le point M′ que M. Mathieu (dans un sens tout différent de celui que l'énoncé attribue à ces mots appelle l'*inverse* de M, relativement au triangle ABC). Si S désigne le point où AM′ rencontre la circonférence circonscrite à M′BC, il est visible que le triangle SBC est symétriquement semblable au triangle PQR. Car si λ, μ, ν sont, en grandeur et en signe (à un multiple près de π), les angles sous lesquels on voit, de M, les côtés BC, CA, AB, du point M′, on voit les côtés sous les angles $A - \lambda$, $B - \mu$, $C - \nu$. Or, ce sont préci-

(*) *Journal*; 1886, p. 109.

(*) Voyez une solution de cette question (*Journal*, 1890, p. 285).

sément là les valeurs des angles de SBC, tandis que les angles de PQR ont pour valeurs, toujours en grandeur et en signe, $\lambda - A$, $\mu - B$, $\nu - C$. Ainsi ils sont égaux et de signes contraires à ceux de SBC. Il suffit donc de montrer que la courbe décrite par le point S, ainsi défini, est égale à l'inverse, relativement à A, de celle qui est parcourue par M.

En effet, on a, entre AM et AS, la relation très remarquable $AM.AS = bc$, ainsi qu'il résulte de la similitude des triangles AMB, ACS. Si donc S′ est le symétrique de S, relativement à la bissectrice de l'angle A, symétrique situé sur AM, on aura $AS'.AM = bc$ et les deux lignes décrites par S′ et M seront inverses l'une de l'autre, relativement à A. Or, le point S décrit une ligne égale à celle de S′; le théorème est donc démontré.

D'ailleurs, si, sur AB, on prend $AC' = AC$ et, sur AC, $AB' = AB$, le triangle S′B′C′ est directement semblable à PQR. Par suite, en prenant B′C′ pour base fixe, on peut dire que les deux sommets S′, M deviennent deux lignes inverses, relativement à A.

A propos de la première partie de la question 318, je me borne à signaler qu'elle est immédiatement résolue par les formules

$$\frac{\alpha \sin P}{\sin (P + A)} = \frac{\beta \sin Q}{\sin (Q + B)} = \frac{\gamma \sin R}{\sin (R + C)},$$

qui expriment que les coordonnées normales α, β, γ du point M sont proportionnelles à

$$\frac{\sin (P + A)}{\sin P} = \frac{\sin (Q + B)}{\sin Q} = \frac{\sin (R + C)}{\sin R},$$

ou, encore, aux quantités :

$\cos A + \sin A \operatorname{cotg} P$, $\cos B + \sin B \operatorname{cotg} Q$, $\cos C + \sin B \operatorname{cotg} R$.

J'ajoute que les trois rapports égaux ont pour valeur commune $-\frac{M_0}{2R}$, où M_0 est la puissance de M relativement à la circonférence O circonscrite à ABC, et 2R le diamètre de cette circonférence.

On peut rapprocher ces formules de celles-ci, qui sont relatives aux coordonnées tripolaires :

$$\frac{AM \sin A}{\sin P} = \frac{BM \sin B}{\sin Q} = \frac{CM \sin C}{\sin R}.$$

QUESTION 362

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

M, N, P *étant trois angles consécutifs d'un quadrilatère inscrit, former*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sin(M+N), & \sin M, & 0, & \sin N \\ \sin M, & -\sin(N+P), & \sin N, & 0 \\ 0, & \sin N, & \sin(M+N), & \sin M \\ \sin N, & 0, & \sin M, & \sin(N+P) \end{vmatrix}.$$

Plus généralement former

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -h, & f, & o, & g \\ f, & -h', & g, & o \\ o, & g, & h, & f \\ g, & o, & f, & h' \end{vmatrix}.$$

(Catalan.)

Par la méthode ordinaire, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -h\{-h'(hh'-f^2)-g^2h'\}-f\{f(hh'-f^2)+fg^2\}-g\{gf^2-hh'g-g^3\} \\ &= hh'\{hh'-f^2+g^2\}-f^2\{hh'-f^2+g^2\}+g^2\{hh'-f^2+g^2\} \\ &= [hh'-f^2+g^2]^2. \end{aligned}$$

Posant ensuite

$$h = \sin(M+N), \quad h' = \sin(N+P), \quad f = \sin M, \quad g = \sin N,$$

et observant que

$$\sin(N+P) = \sin(\pi - M + N) = \sin(M-N),$$

d'où $\sin(M+N)\sin(N+P) = \sin^2 M - \sin^2 N,$

on a $\Delta = o.$

QUESTION 349

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

On considère un triangle quelconque ABC, *le centre* I *du cercle inscrit et le point* M *symétrique de* A, *relativement au milieu de* BC. *Par* M, *on trace* MD *perpendiculaire à* BC *et* ME, MF (*) *faisant,*

(*) C'est-à-dire antiparallèles à BM, CM dans les angles BCM, CBM. B. S.

avec BC, *deux angles égaux à l'angle* A, *l'un de même sens que l'angle de* AB *avec* AC, *l'autre de même sens que l'angle de* AC *avec* AB. *Ces trois droites rencontrent respectivement* IA, IB, IC *en* A′, B′, C′. *Démontrer que*

$$MA' = a \operatorname{tg}\frac{A}{2},\ MB' = b,\ MC' = c.$$

On fera voir aussi que si E′, F′ *sont les rencontres de* ME *et* MF *avec* IA, *on a la relation*

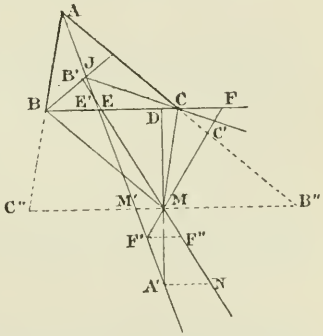
$$\frac{1}{ME'} + \frac{1}{MF'} = \frac{\cot g\frac{A}{2}}{R},$$

dans laquelle R *est le rayon du cercle circonscrit à* ABC, *et où* ME′ *et* MF′ *doivent être affectés de signes, selon le sens de* AJ *où tombent* E′ *et* F′. (Bernès.)

1° Le point A′ est sur la circonférence circonscrite au triangle AB″C″, anticomplémentaire du triangle MBC.

Donc

$$MA' = MB'' \operatorname{tg} C''B''A' = a \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$



Le triangle BEB′ donne :

$$\widehat{BB'E} = 180^\circ - (\widehat{B'EB} + \widehat{B'BE})$$

$$= 180^\circ - \left(A + \frac{B}{2}\right) = \frac{B}{2} + C = \widehat{B'BM};$$

donc $MB' = MB = b$.

De la même manière

$$MC' = MC = c.$$

2° Soit M′ le point d'intersection de B″C″ avec AA′. Menons A′N, F′F″ parallèlement à MM′ jusqu'à la rencontre, en N, F″, avec ME.

Puisque MM′ et MA sont les bissectrices de l'angle E′MF′, les points E′, F′, divisent harmoniquement le segment M′A′; et, à cause des parallèles, les points E′, F″ divisent harmoniquement MN. Donc, en grandeur et en signe

$$\frac{1}{ME'} + \frac{1}{MF'} = \frac{2}{MN}.$$

Mais $$MF'' = MF',$$

et $$MN = \frac{MA'}{\cos NMA'} = \frac{MA'}{\sin MED} = \frac{a \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\sin A} = 2R \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Ainsi $$\frac{1}{ME'} + \frac{1}{MF'} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{R},$$

égalité dans laquelle l'un des segments ME', MF', dont l'extrémité n'est pas située sur le segment M'A', doit être affecté de signe —. En effet, en posant $MN = 2R \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, on prend MN, et par suite — M'A', pour direction positive.

QUESTION 353

Solution par M. B. Sollertinsky à Gatschina.

Soient O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC; K *le point de Lemoine;* α, β, γ, λ *les inclinaisons des droites* OA, OB, OC, OK *sur un axe quelconque. On a*

$$\sin(\alpha-\lambda)\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2} + \sin(\beta-\lambda)\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2} + \sin(\gamma-\lambda)\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Trouver les relations analogues; K *représentant l'orthocentre, ou le centre de gravité, ou le centre du cercle inscrit.*

(Neuberg.)

Supposons, pour fixer les idées, l'axe Ox situé dans celui de deux angles BOC qui est égal au double de BAC.

On a alors

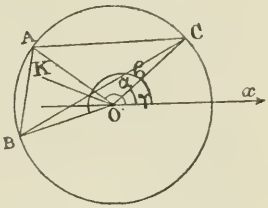
$\alpha - \gamma = 2B$; $\beta - \alpha = 2C$; $2A = 2\pi - (2B + 2C) = 2\pi - (\beta - \gamma)$; d'où

$$\sin A = -\sin\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \sin B = -\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}, \quad \sin C = -\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

On voit aussi sans peine que: $\sin(\alpha-\lambda)$, $\sin(\beta-\lambda)$,

sin $(\gamma - \lambda)$ sont proportionnels, en grandeur et en signe, aux distances des sommets A, B, C à la droite OK.



Ainsi l'égalité proposée exprime cette propriété connue, du point de Lemoine; qu'*il est le centre de forces parallèles, appliquées aux sommets du triangle et proportionnelles à* $\sin^2$ A, $\sin^2$ B, $\sin^2$ C.

L'*orthocentre* étant le centre de forces proportionnelles à tg A, tg B, tg C, on a

$$\sin(\alpha-\lambda)\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin(\beta-\lambda)\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}+\sin(\gamma-\lambda)\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=0;$$

et, pour le *centre de gravité*,

$$\sin(\alpha-\lambda)+\sin(\beta-\lambda)+\sin(\gamma-\lambda)=0.$$

Enfin, pour les *centres des cercles tangents aux trois côtés* :

$$\sin(\alpha-\lambda)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin(\beta-\lambda)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}+\sin(\gamma-\lambda)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

$$-\sin(\alpha-\lambda)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin(\beta-\lambda)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}+\sin(\gamma-\lambda)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

$$\sin(\alpha-\lambda)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin(\beta-\lambda)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}+\sin(\gamma-\lambda)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

$$\sin(\alpha-\lambda)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin(\beta-\lambda)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}-\sin(\gamma-\lambda)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

La première de ces formules se rapporte à l'un des centres I_a, I_b ou I_c, des cercles ex-inscrits, suivant que l'axe Ox est dans l'angle BOC, ou dans COA, ou dans l'angle AOB.

QUESTIONS PROPOSÉES

391. — Résoudre les équations

$$(y-z+b^2-c^2)^2=4a^2x,$$
$$(z-x+c^2-a^2)^2=4b^2y,$$
$$(x-y+a^2-b^2)^2=4c^2z.$$

(G. L.)

392. — Étant donnés deux cercles fixes Δ, Δ' situés dans un même plan; on prend, dans ce plan, un point *arbitraire* M. Les polaires de M, par rapport aux circonférences Δ, Δ', se coupent en M'.

Démontrer qu'il existe un cercle fixe Δ'' (réel ou imaginaire) tel que M, M' soient *conjugués* par rapport à ce cercle.

Ce cercle Δ'' est le lieu des points qui ont, par rapport aux circonférences Δ, Δ' des puissances égales et de signes contraires. *(G. L.)*

393. — 1° Soient BA, AC deux côtés consécutifs quelconques d'un polygone régulier convexe ou étoilé. Trouver deux polygones réguliers, convexes ou étoilés, de côtés égaux à AB, et tels que les trois polygones groupés autour du point A recouvrent exactement la portion voisine de ce point; sans vide, ni empiètement.

2° Laissant de côté le cas où les trois polygones seraient convexes, on reproduira la même disposition à chaque sommet des trois polygones : on obtiendra ainsi de nouveaux polygones dont on complétera l'assemblage, à chaque sommet, par l'adjonction de nouveaux polygones; et ainsi de suite indéfiniment, sans s'inquiéter de savoir si les polygones se recouvrent partiellement ou non. On propose de chercher dans quels cas l'opération s'arrêtera; c'est-à-dire, dans quels cas un des polygones ainsi obtenus à un moment déterminé recouvrira le polygone primitif. La condition doit être la suivante : tous les sommets des polygones construits, au moment où l'opération s'arrête d'elle-même, doivent pouvoir être considérés comme ceux d'un réseau de polygones réguliers convexes recouvrant exactement le plan, sans vide ni duplicature. *(Lucien Lévy.)*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6154-3-91.

COORDONNÉES QUADRIPOLAIRES

Par M. **L. Benezech.**

(Second article) (*)

9. — Soit ε une quantité très voisine de zéro, l'équation

$$(\alpha_1 + \varepsilon)\lambda_1^2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \alpha_3\lambda_3^2 + \alpha_4\lambda_4^2 + k = 0,$$

dans laquelle nous supposons $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, s'écrit, en ayant égard aux relations

$$\frac{\alpha_1 + \varepsilon}{u_1} = \frac{\alpha_2}{u_2} = \frac{\alpha_3}{u_3} = \frac{\alpha_4}{u_4} = \frac{\varepsilon}{V},$$

$$\sum u_1\lambda_1^2 + \frac{kV}{\varepsilon} = 0.$$

Sous cette forme, on voit, d'après ce qui a été dit précédemment, que l'équation considérée représente une sphère dont les coordonnées barycentriques du centre sont u_1, u_2, u_3, u_4, et dont le rayon est donné par la formule

$$\rho^2 = -\frac{k\varepsilon + \sum(\alpha_1 + \varepsilon)\alpha_2 d_{12}}{\varepsilon^2}.$$

On sait d'ailleurs, que le centre de cette sphère se trouve sur sur la droite $A_1\omega_1$ qui joint le sommet A_1 du tétraèdre de référence au centre ω_1 des distances proportionnelles des sommets A_2, A_3, A_4 affectés respectivement de coefficients proportionnels à α_2, α_3, α_4. Si, maintenant, nous faisons tendre ε vers zéro, il est visible que l'équation

$$(1) \qquad \sum \alpha_1\lambda_1^2 + k = 0, \quad \text{dans laquelle} \quad \sum \alpha_1 = 0,$$

représente une sphère de rayon infini, dont le centre est situé sur $A_1\omega_1$, c'est-à-dire un plan perpendiculaire à cette droite.

On peut dire aussi que l'équation (1) représente un plan perpendiculaire à la droite qui a pour équations, en coordonnées barycentriques $\frac{u_2}{\alpha_2} = \frac{u_3}{\alpha_3} = \frac{u_4}{\alpha_4}$.

(*) Voyez *Journal*, p. 25.

Pour déterminer complètement le plan défini par l'équation (1), nous allons chercher, par exemple, le point P_1 où il coupe la *première médiatrice*. (Je propose ce néologisme par analogie avec le terme usité dans la géométrie du triangle, pour désigner, dans la *géométrie du tétraèdre*, la perpendiculaire OO_1 abaissée du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence sur la face $A_2A_3A_4$).

Faisons, dans cette équation, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$,
il vient : $$\alpha_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k = 0.$$

Or, $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 2A_1A_2 . O'P'_1$, $O'P^1$ étant la projection orthogonale de OP_1 sur A_1A_2. De plus, si l'on convient que le segment OP_1 est positif lorsqu'il est dirigé dans le sens A_1H_1 de la hauteur correspondante, et négatif dans le sens contraire, on a :

$$OP'_1 = OP_1 \cos\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1H_1}\right) = OP_1 \frac{A_1H_1}{A_1A_2},$$

d'où

$$(2) \qquad OP_1 = -\frac{K}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{2A_1H_1} = -\frac{k}{6V} \cdot \frac{s_1}{\alpha_1}.$$

On peut noter, en passant, ce théorème de Géométrie, conséquence de cette formule :

Si un plan coupe les droites OO_1, OO_2, OO_3, OO_4 *en des points* P_1, P_2, P_3, P_4, *on a* :

$$\sum \frac{s_1}{OP_1} = 0.$$

Remarque I. — Nous avons supposé implicitement, dans ce qui précède, que les coefficients α_1, α_2, α_3, α_4 étaient tous différents de zéro.

Si l'un des coefficients (α_1, par exemple) est nul, l'équation (1) représente un plan perpendiculaire à la face $A_2A_3A_4$. On peut déduire ce résultat de la formule (2). Pour le démontrer par la méthode employée dans le cas général, il suffit de se rappeler que l'équation

$$\alpha_2\lambda_2^2 + \alpha_3\lambda_3^2 + \alpha_4\lambda_4^2 + k = 0,$$

dans laquelle $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$, représente une sphère dont le centre est situé dans le plan $A_2A_3A_4$.

Lorsque deux des coefficients, α_1, α_2, sont nuls, l'équation (1) représente un plan perpendiculaire à l'arête A_3A_4; car l'équation

$$\alpha_3\lambda_3^2 + \alpha_4\lambda_4^2 + k = 0$$

dans laquelle $\alpha_3 + \alpha_1 \neq 0$, représente une sphère dont le centre est sur A_3A_4.

Remarque II. — Il est évident, d'après ce qui a été dit plus haut, que l'équation

$$\sum \alpha_1 \lambda_1^2 = 0 \qquad \left(\sum \alpha_1 = 0\right),$$

représente un plan passant par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence et parallèle au plan défini par l'équation

$$\sum \alpha_1 \lambda_1^2 + k = 0.$$

On peut aussi déduire ce résultat de l'éqnation $\sum u^1 \lambda_1^2 = 0$ $\sum u_1 \neq 0$ représentant une sphère coupant orthogonalement la la sphère circonscrite au tétraèdre de référence, en considérant le plan comme limite de la sphère.

Il est encore bien évident que les plans ayant pou réquations

$$\sum \alpha_1 \lambda_1^2 + k = 0, \qquad \sum \alpha_1 \lambda_2^2 + k' = 0$$

sont parallèles, si l'on a : $\frac{\alpha_2}{\alpha_2'} = \frac{\alpha_3}{\alpha_3'} = \frac{\alpha_4}{\alpha_4'}$.

10. — Inversement, étant donné un plan P, trouver son équation en coordonnées quadripolaires.

Abaissons la perpendiculaire $A_1\,\omega_1$ sur le plan; soient, ω_1 la trace de cette droite sur la face $A_2\,A_3\,A_4$; α_2, α_3, α_4 les coefficients proportionnels aux coordonnées barycentriques du point ω_1, et P_1 le point d'intersection du plan considéré avec la première médiatrice. L'équation

$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\lambda_1^2 - \alpha_2\lambda_2^2 - \alpha_3\lambda_3^2 - \alpha_4\lambda_4^2 - \frac{6V\alpha_1}{s_1}OP_1 = 0,$$

est évidemment l'équation quadripolaire du plan P.

11. — Par des considérations semblables, on retrouve les résultats correspondants de la géométrie du triangle.

Ainsi, l'équation

$$\text{(E)} \qquad \sum \alpha'\lambda^2 + k = 0, \left(\sum \alpha' = 0\right)$$

représente une droite Δ perpendiculaire à la droite, dont l'équation en coordonnées barycentriques est $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$.

Remarquons, toutefois, que le lieu des points qui vérifient l'équation (E), est le plan mené par Δ, perpendiculairement au triangle de référence.

Ce point P, où Δ rencontre la première médiatrice, est donné par la formule

$$OP = \frac{-k}{4S} \cdot \frac{a}{\alpha},$$

en faisant, pour le signe de OP, une convention analogue à celle qui a été adoptée dans le cas général.

12. — De l'équation (1), découlent un grand nombre de théorèmes de Géométrie, en choisissant convenablement le plan ou le tétraèdre. Voici quelques exemples :

1° Plan mené par le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, perpendiculairement à la droite qui joint le sommet A_1 au centre de la sphère inscrite. Les points de ce plan vérifient la relation :

$$s_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + s_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + s_4(\lambda_1^2 - \lambda_4^2) = 0.$$

2° Plan mené par le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, perpendiculairement à la droite qui joint le sommet A_1 au centre de gravité du tétraèdre. Pour tout point de ce plan on a :

$$3\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2.$$

3° Plan mené par le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ trirectangle en A_1, perpendiculairement à la hauteur relative au sommet A_1.

En se rappelant que, dans un tel tétraèdre, chaque face est moyenne proportionnelle entre la face hypoténuse et sa projection sur celle-ci, on trouve qu'on a, pour tout point, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ de ce plan,

$$s_1^2\lambda_1^2 = s_2^2\lambda_2^2 + s_3^2\lambda_3^2 + s_4^2\lambda_4^2 \quad \text{etc.}$$

(A suivre.)

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION

DE M. SCHOUTE

Par M. **Émile Vigarié.**

La méthode de transformation de M. Schoute présente la plus grande analogie avec la transformation par points inverses de M. le colonel Mathieu et avec celle par points réciproques de M. de Longchamps : son utilité n'est pas moindre. Elle permet de résoudre facilement un grand nombre de questions et d'établir des liens intimes entre certains éléments qui, au premier abord, semblent très éloignés. La simplicité de la loi géométrique qui, dans cette méthode, fait correspondre un point à un point lui donne une grande importance, que les travaux récents de MM. P.-H. Schoute, Artzt, J. Neuberg, Gob, A. Poulain, E. Lemoine et W. Fuhrmann sont encore venus augmenter.

Cette remarquable méthode de transformation a été développée, au point de vue géométrique, par M. Schoute; nous nous proposons d'en faire ici une étude analytique. Divers exemples nous permettrons de montrer l'application qu'on en peut faire dans l'étude de la géométrie du triangle.

1. — En coordonnées normales, l'équation d'un cercle passant par les sommets B et C du triangle ABC est de la forme

$$l(ayz + bzx + cxy) - (ax + by + cz)x = 0,$$

ou

$$l\mathrm{K} - 2\mathrm{S}x = 0,$$

en posant, pour abréger :

$$ayz + bzx + cxy = \mathrm{K},$$
$$ax + by + cz = 2\mathrm{S}.$$

La tangente en B, à ce cercle, ayant pour équation

$$alz - (cl - b)x = 0,$$

il en résulte que les cercles correspondant aux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} l\mathrm{K} - 2\mathrm{S}x = 0, \\ l'\mathrm{K} - 2\mathrm{S}x = 0, \end{cases}$$

seront symétriques par rapport à BC, si les égalités

$$alz - (cl - b)x = 0,$$
$$al'z - (cl' - b)x = 0,$$

représentent deux droites jouissant de cette propriété.

Cherchons quelle relation doit exister entre l et l' pour que cette condition soit remplie.

L'équation d'une droite, menée par B, et faisant l'angle θ avec BC (compté de BC vers BA), est

$$\frac{x}{z} = \frac{\sin\theta}{\sin(B - \theta)}.$$

En identifiant avec $alz - (cl - b)x = 0$, on a

$$\frac{al}{cl - b} = -\frac{\sin\theta}{\sin(B - \theta)}$$

ou

$$\frac{cl - b}{al} = -\sin B \operatorname{cotg}\theta + \cos B.$$

De même, en changeant l en l' et θ en $-\theta$:

$$\frac{cl' - b}{al'} = \sin B \operatorname{cotg}\theta + \cos B.$$

Éliminant θ, on trouve

$$\frac{cl - b}{al} + \frac{cl' - b}{al'} = 2\cos B,$$

ou

$$\frac{b}{a}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right) = 2\left(\frac{c}{a} - \cos B\right),$$

ou

$$\sin B\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right) = 2(\sin C - \cos B \sin A) = 2\sin B\cos A.$$

La relation cherchée est donc

$$(2) \qquad \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 2\cos A.$$

2. — Les équations

$$(3) \quad lK - 2Sx = 0; \quad mK - 2Sy = 0; \quad nK - 2Sz = 0,$$

représentent des cercles passant, chacun, par deux sommets du triangle ABC, et qui ont pour centre radical un point P, dont les coordonnées sont données par les formules

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = \frac{2S}{al + bm + cn} = p,$$

où chaque valeur de p détermine un *triple* de cercles ayant P pour centre radical.

De même, les circonférences correspondant aux équations :

(4) $l'K - 2Sx = 0$; $m'K - 2Sy = 0$; $n'K - 2Sz = 0$,

seront respectivement symétriques des cercles du *triple* précédent, par rapport à BC, CA, AB, si l'on a :

(5) $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 2\cos A$; $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 2\cos B$; $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = 2\cos C$.

Ces trois nouveaux cercles ont pour centre radical le point P′ (x', y', z'); et

$$\frac{x'}{l'} = \frac{y'}{m'} = \frac{z'}{n'} = \frac{2S}{al' + bm' + cn'} = p'.$$

3. — Les relations (5) peuvent s'écrire :

$\frac{p}{x} + \frac{p'}{x'} = 2\cos A$; $\frac{p}{y} + \frac{p'}{y'} = 2\cos B$; $\frac{p}{z} + \frac{p'}{z'} = 2\cos C$.

En éliminant p et p', on trouve

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x'} & \cos A \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y'} & \cos B \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z'} & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre que le lieu du point P′, correspondant à un point P donné, est une hyperbole équilatère passant par les trois sommets du triangle, par l'orthocentre H et par le point P.

Ces résultats ont été indiqués par M. Van den Berg (*).

Applications. — Si l'on prend pour point P le centre de gravité G du triangle;

(*) Voyez : *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1881, deel VII, p. 78. — *Mathesis* tome II, 1882, p. 120. La proposition de M. Van den Berg a été énoncée dans *Mathesis* (question 142) sous la forme suivante : *Soit* D *un point fixe du plan du triangle* ABC. *On décrit trois circonférences quelconques passant respectivement par* B *et* C, C *et* A, A *et* B *et ayant pour centre radical le point* D. *Démontrer que le centre radical des circonférences symétriques des précédentes par rapport aux côtés* BC, CA, AB *décrit l'hyperbole équilatère qui passe par* A, B, C, D. Deux solutions de cette question ont été données ; l'une, analytique, par M. Van den Berg (*Mathesis*, 1887, p. 118), l'autre géométrique, par M. Liénard (*Mathesis*, 1887, p. 190).

on a $$x \sin A = y \sin B = z \sin C;$$
le lieu du point P′ est l'*hyperbole de Kiepert*. Quand P devient le point H_0 : $\frac{a^2x}{\cos A} = \frac{b^2y}{\cos B} = \frac{c^2z}{\cos C}$, c'est-à-dire le réciproque de l'orthocentre, point qui est aussi l'anti-complémentaire du point de Lemoine, le lieu du point P′ est l'*hyperbole de Jerabek*.

Nous n'irons pas plus loin dans l'étude de ces idées générales et nous considérerons seulement le cas où trois circonférences primitives passent par le même point P : nous obtiendrons ainsi la transformation, par cercles symétriques, de M. Schoute.

4. — Les trois circonférences représentées par les équations (3) passeront par un même point P (x, y, z) si l'on a :

(7) $$al + bm + cn = amn + bln + clm.$$

De même les cercles (5) seront symétriques des cercles (3) par rapport à BC, CA, AB, si les relations (5) sont vérifiées. Ils se couperont en un même point P′ (x', y', z') si l'on a :

(7 *bis*) $$al' + bm' + cn' = am'n' + bl'n' + cl'm'.$$

Cette dernière relation se réduit au moyen des formules (5) à :

$$\sum a\left(2 \cos B - \frac{1}{m}\right)\left(2 \cos C - \frac{1}{n}\right) = \sum a\left(2 \cos A - \frac{1}{l}\right)$$

ou

$$4\sum a \cos B \cos C - 2\sum a\left(\frac{\cos B}{n} + \frac{\cos C}{m}\right) + \sum \frac{a}{mn} = 2\sum a \cos A - \sum \frac{a}{l}$$

Mais on a $$\begin{cases} \sum a \cos A = 2\sum a \cos B \cos C \\ \sum \frac{a}{l} = \sum a\left(\frac{\cos B}{n} + \frac{\cos C}{m}\right). \end{cases}$$

Donc la relation (7 *bis*) se réduit à la condition (7), c'est-à-dire que si l'une est vérifiée, l'autre l'est aussi. On arrive ainsi à ce théorème fondamental :

Si trois circonférences, passant chacune par deux sommets du triangle ABC, *se coupent en un même point* P, *les symétriques de ces circonférences par rapport aux côtés sur lesquels ils sont décrits se couperont en un second point* P′.

Pour caractériser la relation qui existe entre ces points, M. Schoute (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1882) dit que l'un des points est le *transformé, par cercles symétriques*, de l'autre. M. Artzt, qui s'est servi de ces points dans l'étude de certains triangles circonscrits au triangle de référence, dit que P et P′ sont deux *points jumeaux*. Neuberg (*Mathesis* 1886, p. 5) propose d'appeler P et P′ des *points conjugués cyclotomiques*. Enfin plus récemment (*Journal de math. sp.*, 1890, p. 95) M. Poulain a proposé de se servir des coordonnées angulaires. Ce sont les angles sous lesquels on voit, du point considéré, les côtés du triangle, ces angles étant toujours considérés comme inférieurs à 180° et de même signe que les coordonnées normales correspondantes. Dans ces conditions, si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont les coordonnées angulaires du point P, celles du point P′ seront $\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}+\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}$; autrement dit, P′ est le *complémentaire angulaire* du point P.

Nous n'emploierons, dans la suite, que le terme de *points jumeaux*.

5. — Les formules (5), rendues homogènes au moyen des relations (7 *bis*) deviennent :

$$\frac{\dfrac{1}{l}}{\dfrac{2\cos A(al'+bm'+cn')}{am'n'+bl'n'+cl'm'}-\dfrac{1}{l'}}=\frac{\dfrac{1}{m}}{\dfrac{2\cos B(al'+bm'+cn')}{am'n'+bl'n'+cl'm'}-\dfrac{1}{m'}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{2\cos C(al'+bm'+cn')}{am'n'+bl'n'+cl'm'}-\dfrac{1}{n'}},$$

ou, en remplaçant l, m, n et l', m', n' par x, y, z et x', y', z'

$$(8)\qquad \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{4S'\cos A}{K'}-\dfrac{1}{x'}}=\frac{\dfrac{1}{y}}{\dfrac{4S'\cos B}{K'}-\dfrac{1}{y'}}=\frac{\dfrac{1}{z}}{\dfrac{4S'\cos C}{K'}-\dfrac{1}{z'}}$$

K′ et S′ étant les expressions de K et S, dans lesquelles x, y, z sont remplacés par x', y', z'.

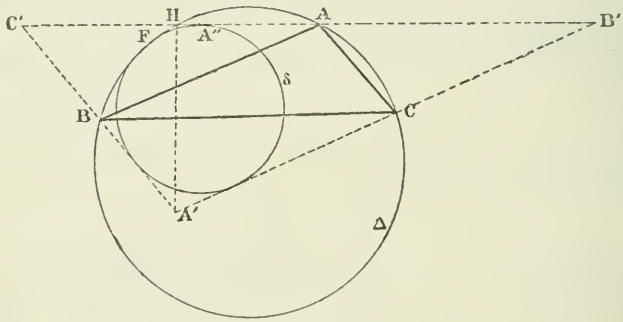
(A suivre.)

SUR LES POINTS ET LES DROITES

DE FEUERBACH

1. — Lorsque deux circonférences remarquables d'un triangle T se touchent en un point F, celui-ci est un point remarquable de T; la tangente en F, aux circonférences considérées, est une droite remarquable de ce même triangle.

Le cercle inscrit δ, d'après le théorème de Feuerbach (*), touche le cercle circonscrit Δ en un point que nous désignerons par F. De même, les cercles ex-inscrits δ_a, δ_b, δ_c touchent Δ en



des points F_a, F_b, F_c. Ces points F, F_a, F_b, F_c, ainsi déterminés, sont quatre points remarquables du triangle; nous les appellerons *points de Feuerbach*. Les tangentes φ, φ_a, φ_b, φ_c en ces points, à la circonférence Δ, constituent quatre droites remarquables du triangle; nous les nommerons *droites de Feuerbach*.

Nous nous proposons de déterminer les coordonnées barycentriques des points de Feuerbach et, en même temps, nous donnerons les équations des droites de Feuerbach.

La réponse à cette double question ne comporte qu'une légère difficulté de calcul, encore celle-ci se trouve-t-elle notable-

(*) Sur ce théorème, voyez *Journal*, 1886, p. 3; 1890, pp. 3 et 193.

ment simplifiée en prenant pour triangle de référence, au lieu du triangle T qui se présente naturellement dans cette détermination, celui qui a pour sommets les milieux des côtés de T; le *triangle complémentaire*, comme on l'appelle.

2. — Nous rappelons que, en coordonnées barycentriques, (α, β, γ) l'équation générale des circonférences, sous la forme que nous leur avons donnée (*) est

$$(\alpha + \beta + \gamma)(l\alpha + m\beta + n\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

l, m, n représentant les puissances respectives des sommets A, B, C, par rapport au cercle considéré.

Cherchons l'équation du cercle δ, inscrit à A'B'C', par rapport au triangle de référence ABC; δ touche B'C' en A''; et l'on a

$$C'A'' = p' - c' = p - 2c = a + b - c,$$

d'où l'on déduit

$$AA'' = AC' - C'A'' = c - b.$$

D'après cela, l'équation de δ est

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left\{(c-b)^2\alpha+(a-c)^2\beta+(b-a)^2\gamma\right\}-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0 \text{ (**)}.$$

3. — D'après ce résultat, l'axe radical de δ et de la circonférence Δ, circonscrite à ABC, circonférence représentée par

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$

correspond à l'équation

$$(\varphi) \qquad \alpha(c-b)^2 + \beta(a-c)^2 + \gamma(b-a)^2 = 0,$$

c'est l'équation de la *première droite de Feuerbach.*

4. — Si l'on cherche l'intersection de la droite (φ) avec la

(*) *Journal de math. sp.*, 1887, p. 57.

Dans cette équation, a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle de référence ABC.

(**) On trouverait de même les équations des circonférences ex-inscrites

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left\{(c - b)^2\alpha + (a + c)^2\beta + (a + b)^2\gamma\right\} - a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta = 0,$$

. . . . . .

Mais, pour abréger, nous nous bornons, dans cette Note, au point F et à la tangente φ; le lecteur pourra poursuivre cette étude et chercher les relations qui existent entre les différents points de Feuerbach, les tangentes correspondantes et les éléments principaux du triangle.

circonférence circonscrite au triangle ABC, on trouve qu'elle touche cette circonférence en un point F dont les coordonnées α_0, β_0, γ_0 vérifient les égalités

$$\text{(F)} \qquad \frac{\alpha_0(b-c)}{a} = \frac{\beta_0(c-a)}{b} = \frac{\gamma_0(a-b)}{c}.$$

Telles sont les coordonnées du premier point de Feuerbach (*).

5. — On peut déduire, des formules précédentes, toute une étude des points et des droites de Feuerbach; la considération de ces éléments remarquables de triangle donnera naissance si, comme nous le croyons, ils n'ont pas encore été mis en lumière, à de nombreuses propriétés.

Par exemple; si l'on considère le point F′, réciproque de F, les coordonnées α', β', γ' de F′ vérifient les relations :

$$\frac{\alpha' a}{b-c} = \frac{\beta' b}{c-a} = \frac{\gamma' c}{a-b}.$$

De ces formules, on tire

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0,$$
$$a^2\alpha' + b^2\beta' + c^2\gamma' = 0.$$

A la première équation, correspond la droite qui passe par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC; l'autre représente la droite de Lemoine, droite qui passe par les points où les tangentes à la circonférence circonscrite à ABC coupent les côtés opposés.

On obtient ainsi deux droites qui déterminent le point F′; connaissant F′, on aura F par la construction connue; celle qui permet de passer d'un point à son réciproque. G. L.

(*) On trouve, de même, pour les trois autres points de Feuerbach :

$$\frac{\alpha_1(c-b)}{a} = \frac{\beta_1(a+c)}{b} = \frac{\gamma_1(a+b)}{-c}, \quad . \qquad (F_a)$$

$$\frac{\alpha_2(c+b)}{-a} = \frac{\beta_2(a-c)}{b} = \frac{\gamma_2(a+b)}{c}, \quad \ldots \qquad (F_b)$$

$$\frac{\alpha_3(c+b)}{a} = \frac{\beta_3(a+c)}{-b} = \frac{\gamma_3(b-a)}{c}, \quad . \qquad (F_c)$$

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. Bernès, l'intéressante lettre que nous publions ci-dessous.

MON CHER COLLÈGUE,

On peut, dans l'article de M. Loreau, supprimer tout l'appareil trigonométrique et les distinctions qui surchargent cet article.

Les coordonnées angulaires d'un point M sont (MB, MC), (MC, MA), (MA, MB), dont la somme est o. Chacune d'elles définit un cercle unique, et convient à tous les points de ce cercle. Et deux d'entre elles définissent un point unique; la troisième en résulte. Il n'y a d'exception que si deux sont nulles, ou si elles sont égales aux angles du triangle A, B, C, c'est-à-dire (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB). Si λ, μ, ν sont les coordonnées angulaires d'un point M ; $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ définissent le point que M. Loreau appelle *jumeau* du premier et que j'appelle *antigonal*, la première dénomination étant inexpressive. Il n'est besoin d'aucune démonstration, ni distinction de régions, pour établir que les trois cercles définis par $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, symétriques relativement à BC, CA, AB, de ceux que définissent λ, μ, ν se coupent en un même point. Cela est évident, car λ, μ, ν ayant une somme nulle, il en est de même pour $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$.

J'appelle *centralement conjugués* ou simplement *conjugués* les points tripolairement associés, pour indiquer qu'ils sont en ligne droite avec le centre O de la circonférence ABC, et que chacun est sur la polaire de l'axe. Il est visible, par cette position, que si les angles de vue (ou coordonnées angulaires) de M sont λ, μ, ν, les angles de vue de son conjugué sont $2A - \lambda$, $2B - \mu$, $2C - \nu$.

Il est plus facile encore de voir que les coordonnées du point inverse de M sont $A - \lambda$, $B - \mu$, $C - \nu$.

De là ce joli résultat, que j'ai rencontré depuis bien longtemps: *les inverses de deux points conjugués sont antigonaux;* car la première coordonnée étant A, et $2A - \lambda$ pour ces deux points, pour les points inverses elle est $A - \lambda$ et $A - (2A - \lambda)$, c'est-à-dire $3\lambda - A$. Donc ces points sont antigonaux.

Par la même raison, on met en évidence cette propriété, que je ne me souviens pas d'avoir vu indiquer ; *les formes des triangles*

podaires successifs d'un point M *sont au nombre de trois et se reproduisent périodiquement dans le même ordre.* C'est-à-dire que si $A_1B_1C_1$ est le podaire de M relativement à ABC, $A_2B_2C_2$ le podaire de M relativement à $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ relativement à $A_2B_2C_2$, etc., $A_3B_2C_3$ est semblable à ABC, $A_4B_4C_4$, par suite à $A_1B_1C_1$, etc. Car λ étant la première coordonnée de M, relativement à ABC, l'angle A_1 est $\lambda - A$; et comme la première coordonnée de M, relativement à $A_1B_1C_1$, est $-A$, l'angle A_2 est $-A-(\lambda-A)$ ou $-\lambda$. De même, la première coordonnée de M, relativement à $A_2B_2C_2$, est $A-\lambda$; l'angle A_3 est $(A-\lambda)+\lambda$, ou A. Donc $A_3B_3C_3$ est directement semblable à ABC. Et de plus la première coordonnée de M, relativement à $A_3B_3C_3$, étant λ, il s'ensuit que M est autohomologue dans ABC et $A_3B_3C_3$. Il serait de même autohomologue dans $A_1B_1C_1$ et $A_4B_4C_4$, etc.

En outre, si $A'_1B'_1C'_1$, $A'_2B'_2C'_2$, $A'_3B'_3C'_3$ sont les podaires successifs du point M′ inverse de M, on voit, par ces mêmes considérations, que $A'_1B'_1C'_1$ est semblable à $A_2B_2C_2$, et $A'_2B'_2C'_2$ semblable à $A_1B_1C_1$. Quant à $A_3B_3C_3$ et $A'_3B_3C'_3$, ils sont semblables à ABC; mais de plus ils sont égaux entre eux; leur rapport de similitude avec ABC est égal au rapport du produit des coordonnées normales de M au produit de ses coordonnées tripolaires, ces coordonnées étant relatives, soit à ABC, soit à l'un quelconque des podaires de M ou de M′. L'angle des côtés homologues de $A_3B_3C_3$, ABC est égal à la somme des angles sous lesquels, de A, B, C on voit MH, H étant l'orthocentre de ABC; et l'angle des côtés homologues de $A_3B_3C_3$, $A'_3B'_3C'_3$ est égal à la somme des angles sous lesquels de A, B, C on voit MM′, quantité double de la précédente.

Avec cette définition des coordonnées angulaires, il y a, dans le plan de tout triangle, deux points d'où les trois côtés sont vus sous des angles égaux, soient $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ pour l'un et $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ pour l'autre. Ces deux points sont antigonaux et par conséquent leurs réciproques sont conjugués.

J'ajoute cette propriété, évidente par ce qui précède, que les premières podaires de deux points conjugués sont symétriquement semblables, et les secondes podaires de deux points antigonaux sont aussi symétriquement semblables.

Voici encore quelques propriétés que je crois inédites. Si l'on appelle *isocycliques*, relativement à BC, les deux extrémités

d'une corde quelconque passent par A dans un cercle quelconque passant par B, C.

1° Les isocycliques de deux points inverses M, M′ *sont inverses et situés sur une parallèle à* MM′.

2° Les isocycliques de deux points symétriques, relativement à BC, *sont antigonaux.*

3° Les isocycliques des inverses de deux points symétriques, relativement à BC, *sont conjugués.*

4° Si M *décrit une courbe, l'isocyclique de son inverse décrit une courbe symétrique, relativement à ta bissectrice de* A *de la transformée de la première par rayon vecteur réciproque ayant* A *pour pôle.*

Voici quelques autres observations.

Dans l'article de M. Poulain, pour les valeurs des angles du triangle podaire de M, relativement à ABC, il est dit qu'on les établit en examinant les positions de M sur AM. En réalité la démonstration peut se faire sans avoir égard à cette position, sans figure, en supposant simplement les quadrilatères MB_1C_1A, MC_1A_1B, MA_1B_1C inscriptibles, ainsi qu'ils le sont par construction même de $A_1B_1C_1$. La voici telle que je l'entends. J'appelle λ, μ, ν les coordonnées angulaires de M définies à $K\pi$ près, et A_1, B_1, C_1 les angles du podaire définis de même.

$$A_1 = (A_1B_1, A_1C_1) = (A_1B_1, A_1M) - (A_1C_1, A_1M),$$

ou, dans le quadrilatère MA_1B_1C,

$$(A_1B_1A_1M) = (CB_1, CM) = (CACM);$$

de même $\quad (A_1C_1, A_1M) = (BC_1, BM) = (BA_1BM);$

donc

$$A_1 = (CA, CM) - (BA, BM) = (CA, BA) - (CM, BM) = -A + \lambda.$$

J'invoque ici cette formule générale, très utile, que si α, β, α', β' sont quatre droites, on a

$$(\alpha, \beta) - (\alpha', \beta') = (\alpha, \alpha') - (\beta, \beta').$$

Cette formule montre, par exemple, que dans deux figures semblables, l'angle des droites homologues (α, α') est constant.

On établit de même, sans qu'il y ait distinction de position à faire, les formules relatives aux coordonnées angulaires des points inverses

$$\lambda' = A - \lambda, \qquad \mu' = B - \mu, \qquad \text{etc.}$$

Dans le même article, le théorème sur le lieu des points M tels que si M′ est l'inverse de, M on ait $\frac{AM}{AM'} = K$, peut se

démontrer géométriquement en faisant voir que si I est le centre du cercle MBC, O celui du cercle ABC et R son rayon, on a $\frac{AM}{AM'} = \frac{OI}{R}$. Ainsi le lieu est formé de deux cercles passant par BC dont les centres I, I_1 sont symétriques relativement à O. J'ajoute que le lieu de M' est formé de deux cercles, passant par BC, dont les centres I', I'_1 sont *conjugués* de I, I_1 (c'est-à-dire tripolairement associés à I, I_1).

A la relation $\frac{AM}{AM'} = \frac{OI}{R}$, j'ajoute celle-ci : $\frac{OI}{r} = \frac{AM}{2\rho}$, r étant le rayon du cercle MBC, ρ celui du podaire de M. Et cette autre $2OI.\alpha = M_0$ (au signe près), α étant la première coordonnée normale de M et M_0, désignent la puissance de M, relativement à la circonférence ABC.

Toutes ces formules se démontrent géométriquement. Enfin voici quelques théorèmes sur le même sujet :

1° Les rayons r, r', r'' *des cercles* MBC, MCA, MAB, *sont inversement proportionnels aux coordonnées tripolaires de* M'.

2° Le triangle II'I', *formé par les centres, est directement semblable au triangle podaire de* M' *relativement à* ABC.

3° Le triangle podaire de O, *relativement au triangle* II'I'', *est directement semblable au triangle formé par les centres des cercles* M'BC, M'CA, M'AB.

A propos de la note relative à la question 318 (*Journal*, p. 90), M. Neuberg nous écrit pour nous faire observer que la généralisation qu'elle signale ne lui avait pas échappé. Elle se trouve dans son Mémoire : *Projections et contre-projections*, pp. 9 et 26.

M. Poulain nous écrit, de son côté, à propos de cette même question, et nous indique qu'elle se résout immédiatement (comme cela résulte d'ailleurs de la Note citée) en faisant usage des formules relatives aux *coordonnées surlatérales*.

J ai oublié de dire, à propos de cette Note, qu'elle m'avait été communiquée par M. Bernès avant l'apparition des articles de MM. Loreau et Poulain. Les formules qui se trouvent à la fin de cette Note ont été indiquées, dès 1884, aux étudiants de l'Académie de Paris, candidats à l'Agrégation de l'enseignement spécial, par M. Bernès qui, à cette date, était chargé de leur préparation. G. L.

BIBLIOGRAPHIE

La très intéressante brochure (*) que M. Matrot consacre au beau théorème de Bachet : *tout nombre entier est la somme de quatre carrés, au plus*, plaira beaucoup à tous ceux qui s'occupent, à quelque degré que ce soit, de la théorie des nombres.

Je dois dire, tout d'abord, que cette démonstration est absolument complète, parfaitement rigoureuse, et qu'elle n'exige aucune étude préalable pour être comprise du lecteur ayant quelque habitude de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaires : elle emprunte, à la théorie des résidus quadratiques, un minimum de résultats très simples et presque immédiats.

M. Matrot établit d'abord l'identité d'Euler relative au produit de deux sommes de quatre carrés ; il est vrai qu'il vérifie cette identité, mais les moyens directs de l'établir sont plus longs et plus difficiles à suivre que la vérification immédiate.

Puis (et c'est là l'un des points les plus importants de la brochure en question), M. Matrot établit en toute rigueur que *tout nombre premier qui divise une somme de quatre carrés premiers dans leur ensemble, est lui-même une somme de quatre carrés, au plus.* Il existe une démonstration de ce théorème dans le second volume de l'*Algèbre supérieure de J. Serret ;* mais cette démonstration n'est pas rigoureuse, et, d'ailleurs, l'auteur n'introduit pas cette restriction que le diviseur doit être premier. Cette restriction est-elle nécessaire? M. Matrot en fait usage dans sa démonstration. En tout cas, si l'on considère un diviseur d'une somme de deux carrés premiers entre eux, la restriction dont je parle est inutile. Il y aurait donc là un point à éclaircir, mais ce n'est d'aucune utilité pour le théorème de Bachet.

Enfin M. Matrot établit très simplement, en demandant fort peu de choses à la théorie des résidus quadratiques, que *tout nombre premier divise une somme de deux ou de trois carrés premiers entre eux.* Alors tout est établi.

L'auteur eût abrégé un peu l'exposition de ses méthodes en admettant que le lecteur est un peu familiarisé avec les nombres négatifs.

J'ai communiqué, à M. Tannery, il y a quelques mois, pour le *Bulletin*

(*) *Démonstration élémentaire du théorème de Bachet.* par A. Matrot, ingénieur en chef des Mines, 16 pages. — Librairie Nony, 17, rue des Écoles.

Le compte rendu qui suit a été fait par M. Humbert, à qui nous avions communiqué la brochure de M. Matrot, en lui demandant de vouloir bien en faire une analyse.

Nous savions que M. Humbert avait travaillé, tout récemment, avec succès, le même sujet et nul ne pouvait faire cette analyse avec plus de compétence. (Voir *Bulletin des Sc. math.*, févr. 1891.)

Nous tenons à nous associer personnellement aux éloges mérités que M. Humbert adresse à la démonstration de M. Matrot. Si celle-ci ne répond pas complètement au *desideratum* que nous avons autrefois formulé, à son sujet (*Journal* 1886, p. 89) elle est bien près de le réaliser, quand on la débarrasse surtout de certaines longueurs que l'auteur a maintenues pour lui conserver son caractère purement arithmétique. Mais ce souci peut être écarté, croyons-nous, dans la démonstration en question, qui s'adresse à un public d'élèves déjà initiés à la notation algébrique et aux nombres négatifs. G. L.

des Sciences mathématiques, une démonstration du même théorème qui reposait aussi uniquement sur les propriétés les plus simples des résidus quadratiques; mais je ne m'étais pas préoccupé de réduire au minimum l'emploi de ces propriétés ni d'éclaircir les théorèmes accessoires relatifs à l'identité d'Euler. J'avais bien senti cependant le besoin de rendre ces questions plus rigoureuses et plus claires, et j'aurais, peut-être, complété mon travail à ce point de vue, si la brochure que vient de publier M. Ma trot, n'était venue, très heureusement, m'en dispenser.

E. HUMBERT.

Arithmétique élémentaire, par Jean MACÉ, sénateur inamovible. — Le Groupe de l'Amérique latine, dans la Ligue internationale vient, d'entamer la première série de sa *Bibliothèque scolaire*.

Elle débute par une *Arithmétique élémentaire* de son président d'honneur Jean Macé, qui a repris sa plume de vulgarisateur pour initier les enfants de l'Amérique aux mystères de l'Arithmétique. Il faut dire qu'ils cessent de l'être avec lui. Dans un petit volume de 80 pages qui pourrait presque passer pour un livre de lecture, il a fait tenir, sous une forme rendue amusante par la bonhomie et la clarté de l'explication, le raisonnement complet de la numération, des quatre règles et des fractions, le point de départ de toutes les études de mathématique.

Ce livre de classe d'un genre tout nouveau, fait spécialement pour les écoles de l'Amérique latine; a été traduit en espagnol par M. de Mestre y Amabile, secrétaire général du Groupe, qui l'a déjà présenté au Ministre de l'instruction publique de Vénézuéla. Le texte original rendra un égal service dans les écoles françaises, et surtout dans les familles, pour les premières leçons de calcul à donner aux enfants.

Les deux éditions, française et espagnole, sont en vente au Bureau du Groupe de l'Amérique latine, 63, rue de Provence. — Prix : 1 franc.

QUESTIONS 357, 358

Statements n° 1/6

NOTES ET DÉVELOPPEMENTS

Solutions par M. SOLLERTINSKY.

1. Soient M, M′ deux points inverses par rapport au triangle ABC. On sait que :

1° Si les points M, M′, *sont tous deux à l'intérieur du triangle de référence, la somme des angles* BMC, BM′C *est égale à* $\pi + A$.

Il est facile de voir que :

2° La somme des angles BMC, BM′C *est supplémentaire de* A *ou égale à* A, *suivant que les points* M, M′, *étant en dehors du cercle* ABC, *sont situés dans l'angle* BAC *ou dans l'angle adjacent supplémentaire.*

3° La différence des angles BMC, BM′C *est supplémentaire de* A *ou égale à* A, *suivant que le segment du cercle* ABC, *à l'intérieur duquel se trouve l'un des points* M, M′, *est opposé ou adja-*

cent à l'angle BAC; le second des points M, M′ se trouve alors dans l'angle, opposé par le sommet à celui qui s'appuie sur le segment (*).

2. Soit M un point variable d'une circonférence Δ, passant par les sommets B, C du triangle ABC. Lorsque M parcourt un arc de Δ, sans rencontrer les côtés du triangle, le point inverse M′ parcourt aussi un arc de la circonférence Δ′ qui passe par B, C; car alors l'angle BM′C est constant.

En rencontrant l'un des côtés AB, AC, le point M vient dans l'angle adjacent; mais bien que, dans ces conditions, la relation entre les angles $\widehat{BMC}$, $\widehat{BM'C}$ soit modifiée, le point M′ reste encore sur Δ′; car, ayant passé par le sommet opposé C, B, il vient sur l'autre côté de BC. Supposons, par exemple, que le point M passe de l'intérieur de ABC.

On avait d'abord (1, 1°)

$$\widehat{BMC} + \widehat{BM'C} = \pi + A;$$

et l'on a, maintenant (1, 3°),

$$\widehat{BM_1C} - BM_1'C = A;$$

mais, en retranchant les deux dernières égalités, après avoir observé que $\widehat{BM_1C} = \widehat{BMC}$,

on trouve $\widehat{BM'C} + \widehat{BM_1'C} = \pi$.

Donc, *la circonférence* Δ, *qui passe par deux sommets du triangle de référence, a pour inverse une autre circonférence* Δ *qui passe par les mêmes sommets.*

3° *Une droite quelconque* AM *coupe, en* M, N, *une circonférence* Δ *qui passe par les sommets* B, C *du triangle* ABC. *Si* M′, N′ *sont les inverses de* M, N, *relativement à* ABC *; 1° les droites* MM′, NN′ *sont parallèles, et le quadrilatère* BCM′N′ *est inscriptible; 2° pour que les droites* MM′, NN′ *soient parallèles à* BC, *il faut et il suffit que la corde* MN *soit divisée harmoniquement par* A *et* BC.

1° En premier lieu, les points M′, N′ sont sur le cercle Δ′, inverse de Δ (2). Ensuite, les angles $\widehat{MBA}$, $\widehat{AN'C}$ doivent être égaux ou supplémentaires, puisque les angles $\widehat{MBA}$, $\widehat{M'BC}$ sont égaux et les angles $\widehat{M'BC}$, $\widehat{AN'C}$, dans le cercle Δ′, sont égaux

(*) Voir, sur la position relative de deux points inverses, une Note de M. *E. Vigarié*, *J. E.* 1885, p. 245.

ou supplémentaires. De même, les angles AMB, ACN′ doivent aussi être égaux ou supplémentaires. Mais les angles BAM, CAN′ sont égaux : donc les triangles AMB, ACN′ sont équiangles. Ainsi

$$AM \,.\, AN' = AB \,.\, AC.$$

De même $$AN \,.\, AM' = AB \,.\, AC$$

et par suite, $$\frac{AM}{AN} = \frac{AM'}{AN'}.$$

Donc les droites MM′, NN′ sont parallèles.

Corollaire. — *Les tangentes, menées de* A, *à deux cercles inverses qui passent par* B, C, *sont isogonales dans l'angle* BAC *et leur rectangle est équivalent au rectangle des côtés* AB, AC.

En effet, lorsque AM, tournant autour de A, devient tangente à Δ, la droite AM′ tournant en sens contraire, devient aussi tangente à Δ′.

2° Soient δ, δ′ les points, où les droites AM, AM′ rencontrent le côté BC.

Les faisceaux (B.AδMN), (B.δ′AM′N′) étant symétriquement égaux, le rapport anharmonique

$$(A\delta MN) = (\delta' AM'N');$$

mais pour que les droites MN′, NN′ soient parallèles à BC, il faut et il suffit que

$$(A\delta MN) = (A\delta' M'N').$$

Par suite $$(A\delta' M'N') = (\delta' AM'N');$$

d'où $$(A\delta' M'N') = -1 = (A\delta MN).$$

De là découle la propriété signalée par M. *Bernès* : (n° 357).

Par un point D *pris sur* BC, *dans le triangle* ABC, *on trace une droite* EDF *antiparallèle à* BC, *relativement à l'angle* A.

1° La circonférence qui passe par B, C, E, F *coupe orthogonalement la circonférence décrite sur* AD *comme diamètre.*

2° Si M, N *sont les points où cette circonférence rencontre* AD, *et que* M′, N′ *soient les points inverses de* M, N *relativement à* ABC, *les droites* MM′, NN′ *sont parallèles à* BC.

En effet, le point D, comme appartenant à la polaire de A relativement au cercle BCEF, est conjugué harmonique de A relativement à MN; d'ailleurs tout cercle passant par les points

M, N, conjugués harmoniques par rapport au diamètre AD d'un cercle fixe, coupe orthogonalement ce dernier.

4. *Une droite quelconque, issue de* A, *coupe deux cercles inverses, qui passent par* B, C, *respectivement en* M, N; P′, Q′.

1° Deux quelconques de ces quatre points (mais non situés sur le même cercle), *et leurs inverses, sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible, symétriquement semblable au quadrilatère ayant pour sommets, deux autres points et leurs inverses.*

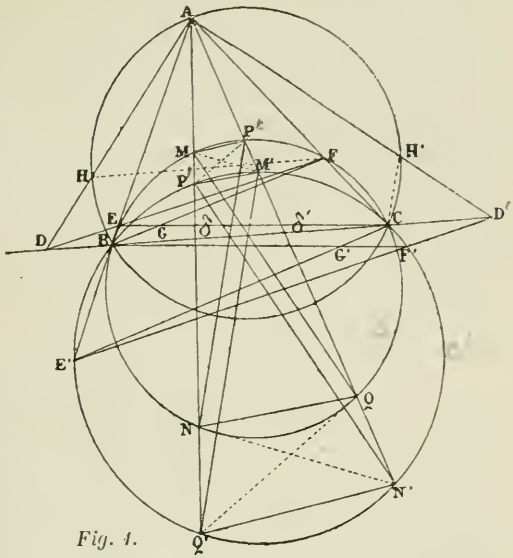


Fig. 1.

2° Les côtés correspondants des quadrilatères MPNQ, M′P′N′Q′ *se rencontrent sur la droite* BC, *et les droites joignant, à* A, *ces points de rencontre, sont, deux à deux, symétriques par rapport à la bissectrice de* $\widehat{BAC}$.

1° Considérons, par exemple, le quadrilatère MM′QQ′.

On a, en Δ, $\widehat{MQM'} = \widehat{MPB}$;

et en vertu d'une propriété des points inverses :

$$\widehat{MBP} = \widehat{M'BP'} = \widehat{MQ'M'}. \qquad (\text{en } \Delta').$$

Donc $\widehat{MQM'} = \widehat{MQ'M'}$.

Mais MQ et NP, M′Q′ et N′P′ étant antiparallèles, dans l'angle BAC, ainsi que MM′ et PP′ (car PP′ est parallèle à QQ′), QQ′ et NN′, les quadrilatères MM′QQ′, PP′NN′ sont symétriquement semblables.

2° Le point de rencontre des droites MQ, M′Q′, comme centre radical des trois circonférences Δ, Δ′ et MM′QQ′, est sur

BC. Ce point, et l'intersection des droites PN, PN', étant les points homologues des quadrilatères MM'QQ', PP'NN', les droites joignant A à ces points sont homologues, et, par suite, symétriques par rapport à la bissectrice de A.

5. *Si les circonférences inverses, passant par* B, C, *rencontrent les côtés* AB, AC *en des points* E, E'; F, F', *les droites* BF *et* BF', CE *et* CE' *sont antiparallèles dans l'angle* BAC.

Inversement. *Si les droites* BF, BF' *sont antiparallèles dans l'angle* BAC, *les circonférences* BFC, BF'C *sont inverses l'une de l'autre.*

En effet, si le point F est sur AC, le point F' peut être sur AC ou sur le prolongement de AC.

Dans le premier cas, on a (1, 1°)

$$\widehat{BFC} + \widehat{BF'C} = \pi + A.$$

Mais $\widehat{BFC} = A + \widehat{ABF}$, $\widehat{BF'C} = \pi - \widehat{BF'A}$;

d'où $$\widehat{ABF} = \widehat{BF'A}.$$

Dans le second cas,

$$\widehat{BFC} + (\pi - BF'A) = \pi + A;$$

d'où, encore, $$\widehat{ABF} = \widehat{BF'A}.$$

Enfin, si F est sur le prolongement de CA, le point F' doit être sur le même prolongement; et l'on a (1, 3°)

$$(\pi - \widehat{BF'A}) - \widehat{BFA} = \pi - A.$$

Mais alors $$A = \widehat{BFA} + \widehat{FBA},$$

d'où $$\widehat{BF'A} = \widehat{FBA}.$$

Remarques. — *1. Les droites* BF, CE *sont respectivement parallèles aux droites* CE', BF'

car $$\widehat{ABF} = \widehat{AF'B} = \widehat{AE'C}.$$

2. Les droites EF, E'F' *sont parallèles l'une à l'autre,* comme étant antiparallèles à une même droite BC, relativement au même angle A.

3. Si les droites EF E'F' *coupent* BC *en* D, D', *et si les droites* BF *et* CE, BF' *et* CE' *se rencontrent en des points* G, G', *les droites* AD *et* AD', AG *et* AG' *sont symétriques relativement à la bissectrice de l'angle* BAC.

En effet, les droites BF' et FB, CE' et EC, et, par suite, E'F' et BC, sont les droites homologuesdes triangles ABC et AFE,

semblables et disposés symétriquement, par rapport à la bissectrice de A.

4. Si la droite AD *rencontre la circonférence* ABC *en* H, *les quadrilatères* DHCF, DHBE *sont inscriptibles;* car les angles CHA, DFA, comme égaux à l'angle B, sont égaux.

6. (Question 358). AD, AD′ *étant, relativement à l'angle* A *du triangle* ABC, *deux droites antiparallèles, qui rencontrent en*

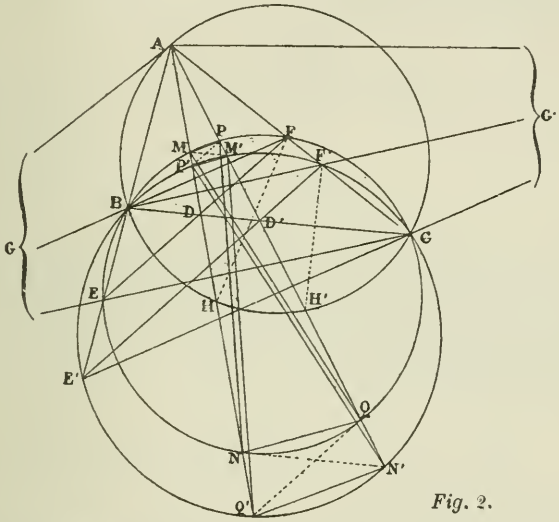


Fig. 2.

H, H′ *la circonférence circonscrite à* ABC; *on trace par* H, *dans l'angle* HAC, HF *antiparallèle à* DC, *et par* H′, *dans l'angle* H′AC, H′F *antiparallèle à* D′C.

1° Les droites BF, BF′ *sont antiparallèles relativement à l'angle* BAC; *2° si* P′ *est l'un des points de rencontre de* AD′ *et de la circonférence circonscrite* FBC, *et* P *le point du même côté de* BC, *où* AD *est rencontré, par la circonférence circonscrite à* F′BC, PP′ *est antiparallèle à* DD′, *relativement à* DAD′; *et les points* P, P′ *sont inverses l'un de l'autre, dans le triangle* ABC (fig. 2).

(Bernès.)

1° Soit E l'intersection de DF et AB. On a

$$\widehat{AFE} = \widehat{CHD}\ (*) = \widehat{ABC}.$$

(*) Ou $\widehat{CHA}$, sur la fig. 1.

Donc EF et BC sont antiparallèles dans l'angle BAC. E'F' étant aussi antiparallèle à BC, dans le même angle, EF, EF' sont parallèles l'une à l'autre; d'où $\widehat{EDB} = \widehat{CD'F}$. Donc, D et D' étant les points homologues des triangles AFE, ABC, symétriquement semblables, les points B, F' le sont aussi. Par suite,

$$\widehat{FBA} = \widehat{BF'A}.$$

Autrement : D, D' étant les points homologues des triangles semblables AFE, ABC, on a

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{AB}{AF}.$$

D, D' étant aussi des points homologues des triangles ABC, AF'E', on a

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{AB}{AF'},$$

Donc $$\overline{AB}^2 = AF.\ AF'.$$

2° Les circonférences BFC, BF'C sont donc inverses l'une de l'autre (5), et le quadrilatère MPM'P' étant inscriptible (4), la droite PP' est antiparallèle à MM', dans l'angle DAD'; ainsi MM' est parallèle à DD' (3).

ERRATA

P. 30, ll. 12 et 13. *Supprimer et lire* α', β'' désignant respectivement les angles $\widehat{MAB}$, $\widehat{MBA}$.

P. 65, l. 7 (en remontant). *Au lieu de* 6, *lisez* 9.

P. 67, l. 1 (en remontant). *Au lieu de* H_1O^2 *lisez* H_1O^2.

P. 79, formule (18). *Au lieu de* $\alpha\mu\beta$, *lisez* $a\mu\beta$.

P. 94, l. 3 (en remontant). *Au lieu de* $-\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$, *lisez* $\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$.

Année 1890 :

P. 257, l. 8. *Au lieu de* S_1C_i, S_2C_i, *lisez* J_1C_i, J_2C_i.

P. 260, l. 1. *Au lieu de* $M'_aM''_a$ *lisez* $M'_aU''_a$.

P. 260, l. 12. *Au lieu de* $M'_aM'_bM'_c$ *lisez* $M'_aM_bM_c$.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8534-4-91.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

Préliminaires.

1. *Définitions.* — ABC étant le triangle de référence, et A′B′C′ un triangle quelconque; si deux points M, N sont sur une même circonférence avec B′, C′ et en ligne droite avec A′, nous dirons qu'ils sont *isocycliques relativement à* B′C′ *et* A′. Deux points isocycliques, relativement à BC et A, seront dits simplement *isocycliques*.

Nous appellerons *conjugués relativement au triangle* A′B′C′ deux points conjugués harmoniques, relativement à un diamètre de la circonférence A′B′C′. Ils sont en ligne droite avec le centre, d'un même côté du centre; et leurs distances au centre ont le rayon pour moyenne proportionnelle. Cette dénomination, sauf la restriction du sens, est empruntée à Chasles, qui appelle *conjugués, relativement à une conique*, deux points dont chacun est sur la polaire de l'autre. Quand les deux points seront conjugués relativement au triangle de référence ABC, nous les dirons simplement *conjugués*.

Comme, dans la méthode que nous proposons d'exposer, les dénominations d'*inversion* et de *points inverses* sont employées dans le vieux sens consacré par l'usage, nous devrons, pour éviter toute confusion, écarter le sens que M. Mathieu a donné à cette dernière dénomination. Les points que M. Mathieu appelle *inverses* seront, dans le cours de ce travail, dits *isogonaux* (*).

Les angles, dans tout ce qui va suivre, sont supposés évalués en grandeur et signe, à $K\pi$ près. L'angle (α, β) est l'une quelconque des quantités positives ou négatives dont il faut

(*) M. Bernès, dans le manuscrit qu'il m'a adressé, proposait l'expression *normalement réciproques* et, par abréviation, *réciproques*. Mais ce mot, dans la Géométrie du triangle, étant pris dans un sens bien déterminé, pour éviter la confusion, j'ai substitué au terme proposé par M. Bernès, celui d'*isogonaux* qui rappelle assez bien la construction géométrique reliant deux points inverses, au sens donné à ce mot par M. Mathieu. G. L.

faire tourner, autour de leur point d'intersection, la droite α, considérée comme indéfinie, pour l'amener en coïncidence avec la droite β. Cet angle est égal et de signe contraire à l'angle (β, α). M, N, P étant trois points quelconques, l'angle sous lequel, de M, on voit le segment NP, sera, par définition, l'angle (MN, MP) tel qu'il vient d'être défini. Nous pouvons, pour abréger, le désigner par $\widehat{NMP}$, l'ordre des lettres N, P indiquant le sens suivant lequel le segment est parcouru, de telle sorte que $\widehat{NMP}$ et $\widehat{PMN}$ sont égaux et de signes contraires.

Si N et P sont fixes et M variable, l'égalité $\widehat{NMP} = \alpha$ définit une circonférence passant en N, P et qui est tangente à la droite Nx donnée par $(Nx, NP) = \alpha$. La circonférence est unique et tout point M de cette circonférence satisfait à l'égalité $\widehat{NMP} = \alpha$.

Nous appellerons *coordonnées angulaires* d'un point M, relativement à un triangle A'B'C', les angles sous lesquels, de M, on voit les côtés B'C', C'A', A'B'. La somme de ces coordonnées est nulle en vertu de la relation fondamentale

$$(\beta, \gamma) + (\gamma, \alpha) + (\alpha, \beta) = 0$$

qui devient ici

$$(MB', MC') + (MC', MA') + (MA', MB') = 0.$$

Il sera donc expressément entendu que, lorsque nous parlons des coordonnées angulaires λ, μ, ν d'un point M, on a

$$\lambda + \mu + \nu = 0.$$

Par angles d'un triangle A'B'C' nous entendons les trois angles sous lesquels de A', B', C', on voit respectivement B'C', C'A', A'B'. De sorte que

$$A' = (A'B', A'C'), \quad B' = (B'C', B'A'), \quad C' = (C'A', C'B').$$

La somme $A' + B' + C'$ est nulle, car si X, Y, Z désignent ces trois côtés dans l'ordre habituel, on a

$$(Z, Y) + (X, Z) + (Y, X) = (Y, X) + (X, Z) + (Z, Y) = 0.$$

2. — Il est visible que, pour construire un point P dont les coordonnées angulaires relativement à un triangle A'B'C' aient des valeurs données λ, μ, ν, il suffit de construire, sur B'C', un triangle P'B'C' dont les angles soient λ, μ, ν, et de prendre l'isocyclique P, de P', relativement à B'C' et à A'. Ce qui conduit à cette conséquence remarquable : *Les isocyclicques* P, P_1, *relativement à* B'C' *et* A', *de deux points* P', P'_1 *symétriques par rapport à* B'C'.

ont relativement au triangle A′B′C′, *des coordonnées angulaires égales et de signes contraires.* Ce que nous exprimerons en disant qu'ils sont *isoptiques relativement à* A′B′C′. De là, une manière très simple de construire l'*isoptique* P_1 d'un point donné P.

3. — Les mêmes considérations montrent que si M est un point dont les coordonnées angulaires, relativement à ABC, sont λ, μ, ν, pour en déduire le point M′ qui a les mêmes coordonnées relativement à un triangle de même base A′BC, il suffit, après avoir pris le point N où AM rencontre la circonférence MBC, de prendre le point M′ où cette même circonférence est rencontrée par A′N. On pourrait, de là, passer au point M″ qui a les mêmes coordonnées relativement à un triangle A′B′C, puis au point M‴ dont les coordonnées angulaires sont les mêmes relativement à un triangle A′B′C′.

4. — Signalons, en passant, une généralisation remarquable du théorème du § **2** sur les points isoptiques.

Nous dirons que deux points M, N sont *complémentaires*, relativement à un troisième P, lorsque ce troisième a pour coordonnées angulaires les sommes des coordonnées angulaires correspondantes de M et N. C'est ainsi que deux points *conjugués* sont complémentaires relativement au point O, centre de la circonférence ABC; que deux points *isoptiques*, sont complémentaires relativement à tout point à l'infini. que deux points isogonaux sont complémentaires relativement à tout point de la circonférence ABC.

Voici la généralisation : *Lorsque deux points* M, N *sont isogonaux, relativement à un angle* A′BC; *leurs isocycliques* M_1, N_1 *sont complémentaires, relativement à l'isocyclique* A'_1 *de* A′.

Car si α, β, γ sont les angles de A′BC et par conséquent les coordonnées angulaires de A'_1, les triangles MBC, NBC ont pour sommes d'angles α, β, γ puisqu'ils sont isogonaux relativement à A′BC, donc les coordonnées angulaires de M_1, N_1 ont pour sommes α, β, γ, c'est-à-dire que M_1, N_1 sont complémentaires relativement à A'_1.

Dans le cas particulier du théorème sur les points *isoptiques*, les deux points symétriques, relativement à BC, peuvent être regardés comme isogonaux relativement à un triangle applati

A_1BC, A_1 étant sur BC; l'isocyclique de A_1 est à l'infini; c'est pour cela que les isocycliques des deux points symétriques sont isoptiques.

Il y aurait plusieurs cas particuliers intéressants à signaler, je me borne à celui-ci : *si* L *est l'isocyclique du centre* O. *les isocycliques de deux points isogonaux, relativement à* LBC, *sont conjugués*. Nous retrouverons ce point L dans la suite de cette étude.

MÉTHODE DE TRANSFORMATION

5. — J'arrive à l'exposé de la méthode que j'ai en vue.

Si m est l'isocyclique de l'isogonal d'un point M, nous avons signalé (*Journal*, p. 90) la relation $Am.AM = bc$, conséquence de la similitude de AMB. ACm. C'est-à-dire qu'en prenant A pour pôle et bc pour puissance positive d'inversion, le point m, isocyclique de l'isogonal de M, est le symétrique relativement à la bissectrice de A du point inverse de M. Si de même on prenait l'isocyclique de l'isogonal de m on obtiendrait M. Nous disons que ces deux points sont *symétriquement inverses* l'un de l'autre, relativement au pôle A; plus simplement, nous les appellerons *transformés l'un de l'autre*. Et deux figures seront *symétriquement inverses* ou transformées l'une de l'autre, lorsqu'à chaque point M de l'une correspondra, dans l'autre, au point m tel que AM et Am soient antiparallèles relativement à l'angle A et que $AM.Am = bc$.

Si l'une des figures est une droite ou une circonférence, l'autre est une circonférence, qui dégénère en une droite quand la première figure passe par A.

On voit immédiatement que les transformés de B et C sont C et B, que le transformé de A est à l'infini, que BC et la circonférence ABC sont les transformés l'un de l'autre, et *qu'un point* E *pris sur* AC *a pour transformé le point* E *où la parallèle menée par* C *à* BE *rencontre* AB, *de sorte que* BE *a pour transformée* circ. ACE; *et* circ. ABE, *pour transformée* CE. 2ème propriété pour un point F pris sur AB.

6. — Voici les premières propriétés :

1° Le transformé m de M peut s'obtenir, soit en prenant, comme il a été dit, l'isogonal N de M, puis l'isocyclique m de

N; soit en prenant d'abord l'isocyclique n de M, puis l'isogonal m de n. D'où ce théorème :

Les transformés m, n *de deux points isogonaux* M, N *sont isogonaux.* En outre, *les deux droites* MN, nm *sont parallèles*, ainsi qu'il résulte de ce que $bc = \mathrm{AM}.\mathrm{A}m = \mathrm{AN}.\mathrm{A}n$.

De là, aussi, cet autre énoncé : *les transformés* M, n *de deux points isocycliques* m, N *sont isocycliques.*

2° *Si* M, N *sont deux points quelconques*, m, n *leurs transformés, les triangles* AMN, Anm *sont directement semblables* (l'ordre des lettres met en évidence les sommets homologues).

En effet, par un retournement autour de la bissectrice de A, AM, AN se portent sur Am, An, et MN devient antiparallèle à mn dans l'angle mAn; de sorte que les triangles AMN, Anm sont alors symétriquement semblables; donc avant ce retournement, ils sont directement semblables.

Les relations métriques se transforment par la même règle que dans l'inversion ordinaire. Ainsi : *Pour passer d'une relation métrique homogène, concernant les points* M, N, P..., *à la relation correspondante concernant leurs transformés* m, n, p... *il suffit de remplacer, dans la première, chaque longueur* MN *par* $\frac{\mathrm{mn}}{\mathrm{Am}.\mathrm{An}}$; *et, au cas où* A *est une des extrémités de la longueur, de remplacer* AM *par* $\frac{1}{\mathrm{Am}}$.

La similitude mentionnée donne, en effet,

$$\mathrm{MN} = mn.\frac{bc}{\mathrm{A}m.\mathrm{A}n};$$

et on a, par définition, $\mathrm{AM} = \frac{bc}{\mathrm{A}m}$.

Il sera fait un fréquent usage de cette règle. Bornons-nous ici à signaler le cas particulier de quatre points M, N, P, Q en division harmonique sur une droite; sur la circonférence transformée de cette droite, les transformés m, n, p, q sont les sommets d'un quadrilatère harmonique. Et si, comme cas plus particulier, un point P est le milieu d'un segment de droite MN, le transformé p est *harmoniquement opposé* à A relativement à mn, c'est-à-dire que p et A sont les sommets opposés d'un quadrilatère harmonique dont m, n sont les deux autres sommets.

Nous emprunterons aussi à l'inversion ordinaire le théorème sur l'égalité des angles de deux lignes et des lignes inverses. Seulement, il importe d'observer que, tandis que dans l'inversion ordinaire ces angles sont égaux et de signes contraires, dans l'inversion symétrique ils sont égaux.

3° M, m *étant deux points symétriquement inverses, si les coordonnées angulaires de l'un d'eux* M *sont* λ, μ, ν, *les angles du triangle* mBC *déterminé par l'autre point sont* $A - \lambda$, $B - \mu$, $C - \nu$.

Car le triangle a pour angles les coordonnées angulaires de l'isocyclique de m, c'est-à-dire de l'isogonal de M, lesquels sont $A - \lambda$, $B - \mu$, $C - \nu$.

Une autre démonstration est à signaler, parce qu'elle constitue une première application de la méthode d'inversion symétrique. La coordonnée μ ou (MC, MA) est égale à l'angle (CX, CA) que la tangente CX à circonférence AMC forme avec CA; la transformée de CA est BA et la transformée de la circonférence AMC est mB, donc (Bm, BA) $= \mu$. Or

$$(Bm,\ BA) = (Bm,\ BC) + (BC,\ BA) = B - (BC,\ Bm).$$

Donc $\qquad (BC,\ Bm) = B - \mu.$

De même $\qquad (Cm,\ CB) = C - \nu;$

par suite $\qquad (mB,\ mC) = A - \lambda.$

Remarque 1. — On peut énoncer le même résultat en disant que *si* M, m *sont symétriquement inverses, le triangle* mBC *est symétriquement semblable au triangle podaire de* M.

Ce qu'on peut rapprocher de cette autre proposition évidente : *Si* M, N *sont deux points isocycliques, le triangle* NBC *est symétriquement semblable à l'antipodaire de* M.

Remarque 2. — Quant aux coordonnées angulaires de m, la première est $A - \lambda$; les deux autres s'expriment trigonométriquement, en fonction de celles de M, par des formules qui seront données ultérieurement.

Il est bon d'ajouter que si $m\beta$, $m\gamma$ sont tangentes aux circonférences mAC, mAB, les trois angles $\beta m\gamma$, $\gamma m A$, $A m\beta$ sont égaux aux coordonnées λ, μ, ν du point M. Car ces deux circonférences sont les transformées des droites MB, MC, et mA est transformée de MA.

Cela met en évidence ce point, facile à établir directement, que : *pour tout point* m *du plan, la somme algébrique des angles* BMC, $\beta M\gamma$, *est constante et égale à* A.

Nous réservons aussi, pour plus tard, le passage des coordonnées normales de M à celles de m, et quelques relations remarquables qui s'y rattachent. *(A suivre.)*

COORDONNÉES QUADRIPOLAIRES

Par M. **L. Bénézech.**

(*Suite*, voir p. 97.)

13. — Condition pour que quatre plans P′, P″, P‴, P^{IV}, dont on connaît les équations en coordonnées quadripolaires, passent par un même point.

L'équation de (P′) est

$$\alpha_2'(\lambda_1^2-\lambda_2^2)+\alpha_3'(\lambda_1^2-\lambda_3^2)+\alpha_4'(\lambda_1^2-\lambda_4^2)-K'=0.$$

Écrivons, de même, les équations des trois autres plans, et éliminons

$$\lambda_2^1-\lambda_2^2,\quad \lambda_1^2-\lambda_3^2,\quad \lambda_1^2-\lambda_4^2,$$

entre le système des quatre équations ainsi obtenues. On trouve la condition cherchée :

$$\begin{vmatrix} \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' & K' \\ \alpha_2'' & \alpha_3'' & \alpha_4'' & K'' \\ \alpha_2''' & \alpha_3''' & \alpha_4''' & K''' \\ \alpha_2^{\text{IV}} & \alpha_3^{\text{IV}} & \alpha_4^{\text{IV}} & K^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

14. — Équation du plan passant par les trois points

$$(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_4')\quad (\lambda_1'', \ldots)\quad (\lambda_1''' \ldots,).$$

Soit $\Sigma\alpha_1\lambda_1^2+K=0$ l'équation cherchée. Écrivons qu'elle est vérifiée par les coordonnées des points donnés, puis éliminons α_1, α_2, α_3, α_4, K entre le système formé par ces équations et $\Sigma\alpha_1=0$; il vient

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1'^2 & \lambda_1''^2 & \lambda_1'''^2 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2'^2 & \lambda_2''^2 & \lambda_2'''^2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3'^2 & \lambda_3''^2 & \lambda_3'''^2 & 1 \\ \lambda_4^2 & \lambda_4'^2 & \lambda_4''^2 & \lambda_4'''^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation demandée. On peut aussi l'obtenir en appliquant la relation qui existe entre les distances respectives de quatre points de l'espace à quatre points d'un plan.

15. *Applications.* — 1° Équation de la face $A_2A_3A_4$ du tétraèdre de référence :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & d_{21} & d_{31} & d_{41} & 1 \\ \lambda_2^2 & 0 & d_{32} & d_{42} & 1 \\ \lambda_3^2 & d_{23} & 0 & d_{43} & 1 \\ \lambda_4^2 & d_{24} & d_{34} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2° Équation du plan déterminé par l'arête A_1A_2 et le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 0 & d_{21} & 1 \\ \lambda_2^2 & d_{12} & 0 & 1 \\ \lambda_3^2 & d_{23} & d_{23} & 1 \\ \lambda_4^2 & d_{14} & d_{24} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation se déduit aussi, immédiatement, de la relation qui existe entre les distances respectives de quatre points d'une sphère à trois points quelconques d'un point passant par le centre.

16. — Équation d'un plan passant par deux points $(\lambda_2', \lambda_3', \lambda_4')$ $(\lambda_2'', \lambda_3'', \lambda_4'')$ et perpendiculaire à la face $A_2A_3A_4$.

Équation tripolaire d'une droite passant par deux points $(\lambda_2', \lambda_3', \lambda_4')$ $(\lambda_2'', \lambda_3'', \lambda_4'')$. ($A_2A_3A_4$. triangle de référence).

On sait que cette équation a la forme

$$\alpha_2\lambda_2^2 + \alpha_3\lambda_3^2 + \alpha_4\lambda_4^2 + k = 0; \quad \text{avec} \quad \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Donc,

$$\begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_2'^2 & \lambda_2''^2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3'^2 & \lambda_3''^3 & 1 \\ \lambda_4^2 & \lambda_4'^2 & \lambda_4''^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

est l'équation cherchée.

17. *Applications.* — 1° Équation d'un plan perpendiculaire à la face $A_2A_3A_4$, passant par le centre de la sphère circonscrite, et par le point (A_2', A_3', A_4'), :

$$\begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_2'^2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3'^2 & 1 \\ \lambda_4^2 & \lambda_4'^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2° Équation du côté BC du triangle de référence :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & c^2 & b^2 & 1 \\ \mu^2 & 0 & a^2 & 1 \\ \nu^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a\lambda^2 - b\mu^2 \cos C - c\nu^2 \cos B - abc \cos A = 0.$$

3° Équation de AO :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & 0 & 1 \\ \mu^2 & c^2 & 1 \\ \nu^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(b^2 - c^2) - \mu^2 b^2 + \nu^2 c^2 = 0.$$

4° Equation de OG,

$$\lambda^2(b^2 - c^2) + \mu^2(c^2 - a^2) + \nu^2(a^2 - b^2) = 0;$$

5° Equation de OI,

$$\lambda^2 a(b - c) + \mu^2 b(c - a) + \nu^2 c(a - b) = 0;$$

6° Equation de OK,

$$\lambda^2 a^2(b^2 - c^2) + \mu^2 b^2(c^2 - a^2) + \nu^2 c^2(a^2 - b^2) = 0.$$

(A suivre.)

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION

DE M. SCHOUTE

Par M. **Émile Vigarié** *(suite*, v. p. 101*)*.

6. — MM. Neuberg et Gob ont donné, pour la première fois (A. F. Paris 1890, p. 184), les coordonnées barycentriques d'un point d'où l'on voit les côtés d'un triangle sous des angles X, Y, Z. La droite qui joint le sommet A au point P rencontre la circonférence BPC en un second point Q. Si $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ désignent les angles du triangle QBC (*), MM. Neuberg et Gob ont trouvé que les coordonnées barycentriques de deux points jumeaux sont proportionnelles à

$$\frac{1}{\operatorname{cotg} A \pm \operatorname{cotg} \mathfrak{X}'}, \quad \frac{1}{\operatorname{cotg} B \pm \operatorname{cotg} \mathfrak{Y}'}, \quad \frac{1}{\operatorname{cotg} C \pm \operatorname{cotg} \mathfrak{Z}'}.$$

Nous allons démontrer ces formules.

(*) Les angles $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ sont, lorsque P est intérieur au triangle, les suppléments des coordonnées angulaires $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques du point P.

On a : $$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\text{aire APC}}{\text{aire ABP}}=\frac{\text{aire AQC}}{\text{aire AQB}}=\frac{\text{AC.QC sin ACQ}}{\text{AB.QB sin ABQ}}.$$

D'autre part, dans le triangle QBC :

$$\frac{\text{CQ}}{\text{BQ}}=\frac{\sin \mathcal{Y}'}{\sin \mathcal{Z}'}.$$

Donc $$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\sin \text{B} \sin \mathcal{Y}' \sin (\text{C}+\mathcal{Z}')}{\sin \text{C} \sin \mathcal{Z}' \sin (\text{B}+\mathcal{Y}')}=\frac{\operatorname{cotg} \text{C}+\operatorname{cotg} \mathcal{Z}'}{\operatorname{cotg} \text{B}+\operatorname{cotg} \mathcal{Y}'}.$$

Pour le point jumeau de P, on aurait, de même,

$$\frac{\beta'}{\gamma'}=\frac{\operatorname{cotg} \text{C}-\operatorname{cotg} \mathcal{Z}'}{\operatorname{cotg} \text{B}-\operatorname{cotg} \mathcal{Y}'};$$

d'où, les formules cherchées.

Écrivons ainsi les équations précédentes :

$$\operatorname{cotg} \text{A}+\operatorname{cotg} \mathcal{X}'=\frac{\rho}{\alpha}, \qquad \operatorname{cotg} \text{B}+\operatorname{cotg} \mathcal{Y}'=\frac{\rho}{\beta},$$

$$\operatorname{cotg} \text{C}+\operatorname{cotg} \mathcal{Z}'=\frac{\rho}{\gamma},$$

$$\operatorname{cotg} \text{A}-\operatorname{cotg} \mathcal{X}'=\frac{\rho'}{\alpha'}. \qquad \operatorname{cotg} \text{B}-\operatorname{cotg} \mathcal{Y}'=\frac{\rho'}{\beta'},$$

$$\operatorname{cotg} \text{C}-\operatorname{cotg} \mathcal{Z}'=\frac{\rho'}{\gamma'};$$

nous en tirons

$$2 \operatorname{cotg} \text{A}=\frac{\rho}{\alpha}+\frac{\rho'}{\alpha'}, \quad 2 \operatorname{cotg} \text{B}=\frac{\rho}{\beta}+\frac{\rho'}{\beta'}, \quad 2 \operatorname{cotg} \text{C}=\frac{\rho}{\gamma}+\frac{\rho'}{\gamma'};$$

d'où, en remplaçant ρ et ρ' par leurs valeurs (*),

$$\frac{\rho'}{\alpha'}=2 \operatorname{cotg} \text{A}-\frac{\rho}{\alpha}=2 \operatorname{cotg} \text{A}-\frac{\sum \beta\gamma \sin^2 \text{A}}{\alpha \sin \text{A} \sin \text{B} \sin \text{C}(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Si, au lieu de prendre les coordonnées barycentriques α, β, γ du point P, on avait fait usage des coordonnées normales x,

---

(*) Les valeurs de ρ et ρ' s'obtiennent aisément au moyen de l'identité

$$\operatorname{cotg} \text{A} \operatorname{cotg} \text{B}+\operatorname{cotg} \text{C}+\operatorname{cotg} \text{C} \operatorname{cotg} \text{A}=1,$$

on a

$$\Sigma\left(\operatorname{cotg} \text{A}-\frac{\rho}{\alpha}\right)\left(\operatorname{cotg} \text{B}-\frac{\rho}{\beta}\right)=1 \quad \text{ou} \quad \rho^2 \Sigma \frac{1}{\alpha\beta}-\rho \Sigma \frac{1}{\alpha}(\operatorname{cotg} \text{B}+\operatorname{cotg} \text{C})=0,$$

ou $$\rho=\Sigma \frac{\sin \text{A}}{\alpha \sin \text{B} \sin \text{C}} : \Sigma \frac{1}{\alpha\beta}=\Sigma \beta\gamma \sin^2 \text{A} : \sin \text{A} \sin \text{B} \sin \text{C}.$$

y, z, on eût trouvé :

$$x : y : z = \frac{\sin \mathfrak{X}'}{\sin (A + \mathfrak{X}')} : \frac{\sin \mathfrak{Y}'}{\sin (B + \mathfrak{Y}')} : \frac{\sin \mathfrak{Z}'}{\sin (C + \mathfrak{Z}')}.$$

Enfin, d'après M. Lemoine (*A. F.* Paris 1889, p. 208) si α, β, γ sont les coordonnées barycentriques du point P, celles de son jumeau P′ seront :

$$\frac{\alpha}{-a^2(\alpha^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) + b^2\alpha(\alpha + \beta) + c^2\alpha(\alpha + \beta)}, \text{ etc.}$$

Ces diverses relations permettent de calculer facilement, dans les systèmes généralement employés, les coordonnées de deux points jumeaux. Elles permettent aussi de passer d'un système de coordonnées à un autre. En particulier, pour passer des coordonnées angulaires aux coordonnées barycentriques on peut se servir des formules données par M. Poulain (*J. S.* 1890, p. 96). Ajoutant, membre à membre, les égalités :

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{X} - \operatorname{cotg} A = -\frac{\sum a^2\beta\gamma}{2S\sigma\alpha}, \quad \text{(pour P)}$$

$$\operatorname{cotg} (-\mathfrak{X}) - \operatorname{cotg} A = -\frac{\sum a^2\beta'\gamma'}{2S\sigma'\alpha'}, \quad \text{(pour P')}$$

où $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ et $\sigma' = \alpha' + \beta' + \gamma'$,

on en tire $$2 \operatorname{cotg} A = \frac{\sum a^2\beta\gamma}{2S\sigma\alpha} + \frac{\sum a^2\beta'\gamma'}{2S\sigma'\alpha'},$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{\sum a^2\beta'\gamma'}{2S\sigma'} \cdot \frac{1}{\alpha'} - 2\operatorname{cotg} A} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{\sum b^2\alpha\gamma}{2S\sigma'} \cdot \frac{1}{\beta'} - 2\operatorname{cotg} B}$$

$$= \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{\sum c^2\alpha'\beta'}{2S\sigma'} \cdot \frac{1}{\gamma'} - 2\operatorname{cotg} C};$$

expressions équivalentes aux formules (8). *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite;* voir *Journal*, année 1890, p. 134.)

157. — *Si* G *est le centre de gravité d'un triangle;* θ_1, θ_2, θ_3, *les angles de Brocard de* GBC, GAC, GAB. *On a :*

$$\operatorname{cotg}\theta_1 + \operatorname{cotg}\theta_2 + \operatorname{cotg}\theta_3 = 5\operatorname{cotg}\theta. \ (*)$$

On trouve

$$\operatorname{cotg}\theta_1 = \frac{9a^2 + 4m'^2 + 4m''^2}{12S};$$

et, par suite,

$$\Sigma\operatorname{cotg}\theta_1 = \frac{1}{12S}(9\Sigma a^2 + 8\Sigma m^2) = \frac{5\Sigma a^2}{4S} = 5\operatorname{cotg}\theta.$$

158. — *Les portions des médianes d'un triangle, comprises à l'intérieur du cercle circonscrit, ont respectivement pour longueurs :*

$$\frac{b^2+c^2}{2m}, \qquad \frac{a^2+c^2}{2m'}, \qquad \frac{a^2+b^2}{2m''}.$$

Soit AA_1, un des segments considérés; A', la projection de A_1 sur BC. Les équations du cercle circonscrit et de la médiane sont *(coord. tril.)*

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

$$by = cz.$$

On a d'ailleurs $\qquad ax + by + cz = 2S.$

En résolvant ces équations, on trouve

$$A_1A' = |x| = \frac{aS}{2m^2}.$$

Soit M le milieu de BC, on a

$$\sin AMB = \frac{h}{m},$$

$$MA_1 = \frac{a^2}{4m},$$

$$AA_1 = m + \frac{a^2}{4m} = \frac{b^2+c^2}{2m}.$$

(*) Les notations employées dans ces exercices sont celles qui sont généralement adoptées et qui ont été précédemment explicitées. Ainsi, m, m', m'' désignent les longueurs des médianes, etc.

159. — *Les portions des symédianes, comprises à l'intérieur du cercle circonscrit, ont pour longueurs :*

$$\frac{bc}{m'}, \quad \frac{ac}{m'}, \quad \frac{ab}{m''}.$$

Comme dans l'exercice précédent, on trouve

$$A_1A' = \frac{aS}{2m^2}.$$

Si m_1 est la longueur de la symédiane, on a

$$m_1 = \frac{2bcm}{b^2+c^2},$$

puis

$$AA_1 = m_1\left(1 + \frac{a^2}{4m^2}\right) = \frac{m_1(b^2+c^2)}{4m^2} = \frac{bo}{m}.$$

160. — *Soient* H_1 *le point anticomplémentaire de l'orthocentre,* A_1, B_1, C_1, *les points où les droites qui joignent* H_1 *aux sommets du triangle rencontrent les côtés opposés. On projette* A_1 *en* A_c, A_b, *sur* AB, AC; B_1 *et* C_1, *sont projetés, de même, en* B_a, B_c, C_a, C_b; *les droites* BA_b, CA_c *se coupent en un point* A′ AH_1; *de même* AB_a, CB_c *se coupent en un point* B′ *de* BH_1; AC_a, BC_b *se coupent en un point* C′ *de* CH_1.

161. — *Le centre radical des trois cercles ex-inscrits à un triangle est le complémentaire du centre du cercle inscrit.*

Soient u, v, w, ... les puissances des sommets du triangle par rapport à ces cercles, on a.

$$\begin{cases} u = p^2 \\ v = (p-c)^2 \\ w = (p-b)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = (p-c)^2 \\ v' = p^2 \\ w' = (p-a)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = (p-b)^2 \\ v'' = (p-a)^2 \\ w'' = p^2 \end{cases}$$

d'où, pour l'équation, en coordonnées barycentriques, de l'axe radical des deux premiers cercles,

$$\alpha[p^2-(p-c)^2] + \beta[(p-c)^2 - p^2] + \gamma[(p-b)^2 - (p-a)^2] = 0,$$

(1) $$(a+b)(\alpha-\beta) + \gamma(a-b) = 0.$$

De même, pour l'axe radical du premier et du troisième cercles :

(2) $$(a+c)(\alpha-\gamma) + \beta(a-c) = 0.$$

Le centre radical est à l'intersection des axes (1) et (2). En réduisant ces équations, on trouve :

$$\frac{\alpha}{b+c} = \frac{\beta}{a+c} = \frac{\gamma}{a+b}.$$

162. — *Si, dans un triangle, les milieux des hauteurs sont en ligne droite, le triangle est rectangle.*

Pour que les milieux des hauteurs soient en ligne droite, il faut que l'on ait :

$$\begin{vmatrix} h & h\cos C & h\cos B \\ h'\cos C & h' & h' \\ h''\cos B & h''\cos A & h'\cos A \end{vmatrix} = 0,$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A\cos B\cos C,$$

et comme

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C,$$

on a $\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = 0$; etc ...

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

MM. Émile Lemoine et A. Boutin nous ont écrit au sujet de
p 106 l'article que nous venons de publier *sur les points et les droites de Feuerbach*. Ils nous font observer que ces éléments remarquables du triangle ont été, contrairement à ce que nous avions supposé, plus étudiés que nous ne le pensions (*).

A ce propos, M. Lemoine nous communique les formules suivantes qui font connaître les coordonnées normales absolues :

1° Des points de Feuerbach F, F_a, ...

2° Des points F′, F'_a, ... où les droites de Feuerbach touchent l'ellipse maxima inscrite.

$$F \left\{ \rho \,.\, \frac{p-a}{a}(b-c)^2, \quad \rho \,.\, \frac{p-b}{b}(c-a)^2, \quad \rho \,.\, \frac{p-c}{c}(a-b)^2; \right.$$

$$F_a \left\{ -\rho_a \,.\, \frac{p}{a}(b-c^2), \quad \rho_a \,.\, \frac{p-c}{b}(a+c)^2, \quad \rho_a \,.\, \frac{p-b}{c}(a+b)^2; \text{etc} \right.$$

(*) Voyez :

1° Divers articles de M. Émile Lemoine.

(*N. A.* 1886, p. 122; *J. E.*, 1886, p. 193; *A. F.* congrès de Paris, 1889 p. 203, 204, 217; *A. F.* congrès de Limoges, 1890, p. 122.

2° Kœhler, *Exercices de géométrie analytique*, t. 1, p. 175.

3° A. Boutin, *Sur un groupe de quatre coniques remarquables*, *J. E.*, 1890 p. 106.

C'est à Steiner que l'on doit, d'après les renseignements que nous trouvons dans les lettres citées les premiers théorèmes relatifs aux éléments que nous avons appelés, dans l'article cité, points et droites de Feuerbach; notamment cette proposition (v. Kœhler, *loc. cit.*), visée plus loin,

Les droites de Feuerbach relatives à un triangle ABC *touchent l'ellipse maxima inscrite à ce triangle.*

$$F' \left\{ \rho' \frac{(b-c)^2}{a}, \quad \rho' . \frac{(c-a)^2}{b}, \quad \rho' . \frac{(a-b)^2}{c}; \right.$$

$$F'_a \left\{ \rho'_a \frac{(b-c)^2}{a}, \quad \rho'_a . \frac{(a+c)^2}{b}, \quad \rho'_a . \frac{(a+b)^2}{c}; \text{ etc.} \right.$$

où l'on a : $\rho = \frac{1}{2(R-2r)}$, $\rho_a = \frac{1}{2(R+2r_a)}$,

$$\rho' = \frac{1}{p^2 - 3r\delta}, \quad \rho'_a = \frac{1}{(p-a)^2 + 3r_a\delta_a},$$

δ et δ_a représentant respectivement $4R + r$ et $4R - r_a$ qu'on retrouve si souvent dans la géométrie du triangle.

Dans l'ouvrage de Kœhler, les coordonnées des points de Feuerbach sont exprimées en fonction des lignes trigonométriques des demi-angles du triangle; peut-être, les formules que nous avons indiquées sont-elles plus simples que celles qui ont été données par M. Lemoine ou par M. Kœhler. Cela tient au triangle de référence que nous avons adopté.

M. Boutin, dans sa lettre, nous communique le théorème suivant.

Les droites FF_a, FF_b, FF_c *coupent respectivement les cotés du triangle de référence aux pieds des bissectrices intérieures. Les droites* F_aF_b, F_aF_c, F_bF_c *passent, respectivement, par les pieds des bissectrices extérieures. Il en résulte que l'axe d'homologie des triangles* ABC, $F_aF_bF_c$ *est la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures.*

Si A'B'C' *sont les milieux des côtés de* ABC, *les droites de Feuerbach se coupent :*

(Q, Q_a) (Q, Q_b) (Q, Q_c) *sur les bissectrices extérieures de* A'B'C'; (Q_a, Q_b) (Q_a, Q_c) (Q_b, Q_c) *sur les bissectrices intérieures de* A'B'C'. *Il en résulte que le triangle des droites de Feuerbach* $Q_aQ_bQ_c$, *et* A'B'C' *sont homologiques, le centre d'homologie étant le centre du cercle inscrit dans ce dernier triangle.*

Le triangle A'B'C' *et les triangles des droites :* (Q, Q_a, Q_b) (Q, Q_a, Q_c) (Q, Q_b, Q_c) *sont également homologiques; les centres d'homologie étant respectivement les centres des cercles ex-inscrits à* A'B'C'.

Enfin, M. Lemoine, de son côté, joint à sa lettre une question relative au même sujet et qui est proposée plus loin (p. 143).

BIBLIOGRAPHIE

Pantobiblion, Revue bibliographique internationale des sciences polytechniques, 12 livraisons par an. Rédacteur : A. Kercha, Ingénieur, 64, Fontanka, Saint-Pétersbourg. Prix d'abonnement (*): un an: Russie, 25 fr.; union postale, 30 fr.

Le but du *Pantobiblion* est de donner aux techniciens de toutes les spécialités, et en général aux personnes intéressées aux sciences exactes, le moyen de suivre plus facilement les actualités de la littérature scientifique du jour, et d'être toujours au niveau du mouvement littéraire contemporain.

Pour atteindre ce but, le programme du *Pantobiblion* contient :

I. Un bulletin bibliographique de toutes les branches de la polytechnie et des sciences exactes qui s'y rattachent, contenant le Catalogue de tous les livres nouveaux qui paraissent en toutes les principales langues modernes.

II. Une série d'articles critiques sur les principales œuvres scientifiques, rédigés dans la même langue que le livre en question.

III. Une revue des sommaires de tous les principaux journaux relatifs aux sciences polytechniques.

IV. Une revue critique des principaux articles des journaux scientifiques.

V. Les faits divers de la polytechnie.

Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr. Algèbre et Géométrie (Énoncés et Solutions) par A. Grévy, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Bar-le-Duc. — In-8°, avec 30 figures, 1891. Prix : 2 fr. 50 c. Gauthier-Villars.

Les questions traitées dans ce recueil ont toutes été proposées aux différents concours de l'Ecole spéciale militaire; on a choisi les solutions les plus simples, et la méthode qui se présente naturellement à l'esprit a été adoptée de préférence à certains procédés parfois plus élégants, mais auxquels des élèves peu exercés ne sauraient avoir recours sans inconvénient.

Les discussions ont été faites complètement et présentées d'une manière uniforme, afin de mettre l'élève en possession d'une méthode sûre pour résoudre ces questions; quand cela a été possible, on a indiqué à côté de la solution algébrique une solution géométrique.

Ce recueil, destiné aux candidats à Saint-Cyr, pourra également être utile à consulter par les candidats à l'Ecole Navale et au Baccalauréat ès sciences.

(*) On s'abonne à Paris, chez H. Welter, rue Bonaparte, 59.

SUR LA QUESTION 323 (*)

La solution est exacte au fond; mais la rédaction manque un peu de clarté; on peut la remplacer par la suivante, plus explicite.

Soit $A_1B_1C_1$ *l'une des projections de* ABC, *et soient* a, b, c, *les pieds des perpendiculaires abaissées de* A_1, B_1, C_1, *sur la trace fixe; les droites* A_1a, B_1b, C_1c, *sont également perpendiculaires sur la trace, et l'on a*

$$A_1a = Aa \cos \alpha, \quad B_1b = Bb \cos \alpha, \quad C_1c = Cc \cos \alpha,$$

α *désignant l'angle des plans* ABC, $A_1B_1C_1$.

Si donc $A_2B_2C_2$ est le rabattement du triangle $A_1B_1C_1$ sur le plan ABC, les points A_2, B_2, C_2 divisent les droites Aa, Bb, Cc en parties proportionnelles. Si le point A_2 est supposé se mouvoir uniformément sur Aa, les points B_2, C_2 se déplacent uniformément sur Bb, Cc. Nous sommes ainsi ramenés à la question 314, p. 256.

QUESTION 338

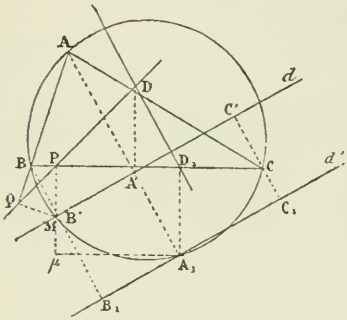
Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Soient A′, B′, C′ *les projections des sommets du triangle* ABC *sur une droite quelconque* δ *de son plan. On sait que les perpendiculaires abaissées de* A′ *sur* BC, *de* B′ *sur* CA, *de* C′ *sur* AB *concourent en un même point* D. *Démontrer que les droites de Simson, des points de rencontre de* δ *avec la circonférence* ABC, *passent par* D. *Déduire de là le point de contact d'une droite de Simson avec son enveloppe.* (J. Neuberg.)

1° Menons la droite d_1, parallèle à δ, par le point A_1 où la droite AA′ rencontre la circonférence ABC.

(*) Voyez la solution à laquelle il est fait allusion (*Journal* 1890, p. 260). M. Sollertinsky avait lui-même appelé notre attention sur la rédaction de cette question, rédaction qu'il nous avait adressée et qui, après nouvelle lecture, lui avait paru, avec raison, insuffisante. Les explications qui suivent nous ont été communiquées par M. J. Neuberg, l'auteur de la question 323. G. L.

Soient A_1, B_1, C_1, les projections de A, B, C sur D_1 et D_1 la projection de A_1 sur BC. Les droites C_1D_1, B_1D_1 sont évidemment perpendiculaires à AB et à CA.



Menons D_1D égale et parallèle à A_1A' : les droites DA', DB', DC' sont respectivement parallèles aux droites D_1A_1, D_1B_1, D_1C_1; et, par suite, perpendiculaires aux côtés de ABC. Donc :

Les perpendiculaires abaissées de A', B', C' *sur* BC, CA, AB *concourent en un même point* D, *dont le lieu est la droite* D_1D *perpendiculaire à* d.

2° Soient M un des points de rencontre de *d* avec la circonférence ABC, P et Q les projections de M sur BC et AB, μ la projection de A_1 sur MP.

Les triangles DPD_1, $A'\mu A_1$ sont égaux; et l'on a : $\widehat{DPD_1} = \widehat{A'\mu A_1}$. Mais dans la circonférence $M\mu A'A_1$

$$\widehat{A'\mu A_1} = \widehat{A'MA_1}$$

Donc $$\widehat{DAD_1} = \widehat{A'MA_1}.$$

Les angles QMA' et BMA_1 ayant même supplément BAA_1, il s'ensuit que :

$$\widehat{A'MA_1} = \widehat{QMB}.$$

Et comme, dans la circonférence MQBP, on a : $\widehat{QMB} = \widehat{QPB}$, on trouve enfin :

$$\widehat{DPD_1} = \widehat{QPB};$$

ce qui montre que la droite de Simson PQ coïncide avec la droite PD;

3° Si les points d'intersection de la droite *d* avec la circonférence se rapprochent, les droites de Simson correspondantes tendent aussi à se confondre. Donc :

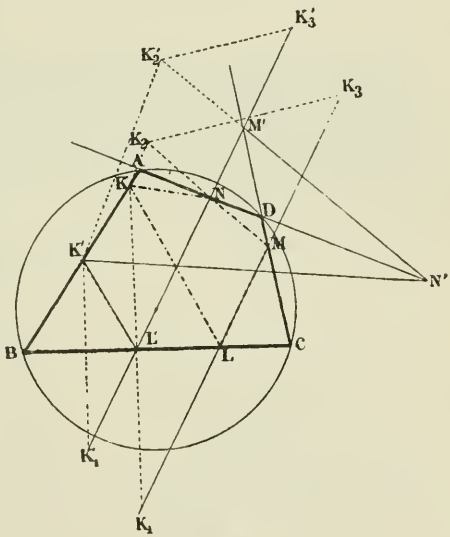
Le point de contact d'une droite de Simson, relative au point M, *avec son enveloppe, est le point* D *correspondant à la droite* D, *tangente à la circonférence* ABC *au point* M.

QUESTION 363

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Si, à un quadrilatère inscriptible Q, *on inscrit une infinité de quadrilatères* P *dont le périmètre soit minimum, ce minimum commun est une quatrième proportionnelle au rayon et aux diagonales de* Q. (Catalan.)

Soient : K un point arbitrairement choisi sur le côté AB d'un quadrilatère inscriptible ABCD ; K_1, K_2 les symétriques de K, par rapport aux côtés BC, AD ; K_3 le symétrique de K_2, par rapport à CD.



Si la droite K_1K_3 rencontre BC, CD respectivement en L, M ; et si K_2M coupe AD en N, le quadrilatère KLMN satisfait à la condition *nécessaire* pour que son périmètre soit minimum ; parce que ses côtés consécutifs, en se rencontrant sur un côté de ABCD, sont également inclinés sur ce côté.

La valeur K_1K_3 du périmètre de KLMN est d'ailleurs *indépendante de la position du point* K.

En effet, puisque on a

$$DK = DK_2 = DK_3, \quad \widehat{KK_2K_3} = D = \pi - B.$$

Dans le triangle isoscèle KDK_3, l'angle au sommet étant égal à 2B, est semblable au triangle KBK_1. Ainsi, les triangles

K_1KK_3, BKD sont semblables, et l'on a

$$\frac{K_1K_3}{BD} = \frac{K_1K}{BK} = 2 \sin B = \frac{AC}{R},$$

R désignant le rayon du cercle ABCD.

Remarque. — *Si un côté de* KLMN, *est inscrit dans l'angle opposé par le sommet de celui de* ABCD, *il doit être compté, dans le périmètre, comme négatif.*

En effet,

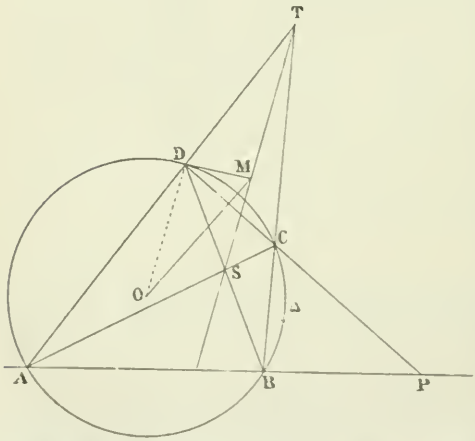
$$K'_1K'_3 = K'_1M' + M'K'_3 = (K'L' + L'M') + (K'N' + M'N').$$

QUESTION 364

Solution par M. Philastre.

On donne un cercle Δ, *une corde fixe* AB *et une corde variable* CD, *de longueur constante. On trace* AC, BD *qui se coupent en* S, *puis* AD, BC *qui se coupent en* T. *Trouver le lieu décrit par le point d'intersection de la droite* ST *avec la perpendiculaire élevée au milieu de* CD, *quand la corde* CD *se déplace.* (M. Fouché.)

La corde mobile CD, prolongée, coupe la corde AB en un certain point P, pôle de la droite TS.



Par suite, le pôle de la corde DC se trouve sur TS; et comme il doit aussi se trouver sur le prolongement du rayon perpendiculaire sur la corde DC, c'est le point M du lieu cherché.

MD est donc tangente au point D; le triangle ODM est rectangle en D; son angle DOM est constant; donc ce triangle

est invariable. L'hypoténuse OM est constante; et le lieu cherché est un cercle concentrique au cercle donné et dont le rayon est facile à construire.

Nota. — Autre solution par M. B. Sollertinsky.

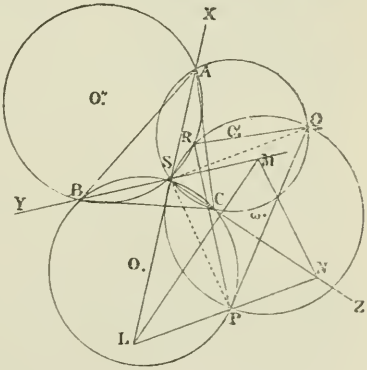
Celui-ci observe que le lieu cherché est indépendant de la position, sur Δ, des points A, B.

Si l'on suppose que A, B soient fixes, ST va passer par un point fixe, pôle de AB.

QUESTION 366

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Entre trois droites concourantes SX, SY, SZ *sont inscrits deux triangles* ABC, LMN. *Dans les circonférences circonscrites à* SBC, SCA, SAB, *on trace les cordes* SP, SQ, SR, *respectivement parallèles à* MN, NL, LM. *Démontrer que les triangles* PQR, LMN *sont symétriquement semblables.* (Bernès.)



Soient O, O′, O″ les centres des circonférences SBC, SCA, SAB. Les droites O′O″, O″O, OO′ étant respectivement perpendiculaires sur SL, SM, SN, les triangles OO′O″, LMN sont orthologiques. Par conséquent, les perpendiculaires des sommets de OO′O″, sur les côtés correspondants de LMN, ou sur leurs parallèles SP, SQ, SR, concourent en un même point ω centre de la circonférence PSRQ.

De là résulte que les triangles PQR, LMN sont équi-angles; d'ailleurs, ils sont orientés inversement.

QUESTION 368

Solution par M. H. Youssoufian, professeur à l'École Milkié (Constantinople).

Tout nombre de la forme $(2p+1)^2(2q+1)$ *peut, de deux façons différentes, être considéré comme la différence de deux carrés.*

(G. Russo.)

1° Posons $A^2 - B^2 = (2p+1)^2(2q+1)$,

ou

(1) $(A+B)(A-B) = (2p+1)^2(2q+1)$.

On vérifie cette identité, en posant

$$A + B = (2p+1)^2, \qquad A - B = 2q+1.$$

De là, on tire pour A, B deux expressions qui donnent

(2) $(2p^2+2p+q+1)^2 - (2p^2+2p-q)^2 = (2p+1)^2(2q+1)$.

2° On peut encore vérifier (1) en posant :

$$A + B = (2p+1)(2q+1), \qquad A - B = (2p+1).$$

Les valeurs correspondants de A et de B, donnent:

(3) $[(2p+1)(q+1)]^2 - [q(2p+1)]^2 = (2p+1)^2(2q+1)$.

Les identités (2) et (3) répondent à la question posée.

Remarque. — En posant, comme le fait, M. Sollertinsky dans s la solution qu'il nous a adressée,

$$A + B = (2p+1)^2)2q+1),$$
$$A - B = 1;$$

on a une troisième solution; alors A. B sont deux nombres entiers *consécutifs;* mais cette solution évidente appartient à tous les nombres impairs, car

$$(h+1)^2 - h^2 = 2h+1.$$

M. Sollertinsky examine le cas général, celui où l'on a

$$N = (2a+1)^\alpha(2b+1)^\beta \ldots (2l+1)^\lambda,$$

et il observe que la décomposition est possible de

$$\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1) \qquad \textit{manières différentes,}$$

quand N n'est pas un carré parfait, et de

$$\frac{1}{2}[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)-1] \quad \textit{manières différentes},$$

quand N est un carré parfait. G. L.

NOTA. — M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix, nous a envoyé une solution de la Question 368.

QUESTIONS PROPOSÉES

394. — Soient F, F_a, F_b, F_c les quatre points de contact du cercle de *Feuerbach* avec le cercle inscrit et les cercles ex-inscrits à un triangle ABC; on sait que les tangentes au cercle de Feuerbach touchent l'ellipse d'aire maxima inscrite au triangle; soient F′, F'_a, F'_b, F'_c les points de contact. Démontrer les formules :

$$FF' = -\frac{1}{2}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab} = -\frac{1}{2}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{p^2-3r\delta},$$

$$F_aF'_a = -\frac{1}{2}\frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{a^2+b^2+c^2-bc+ac+ab} = -\frac{1}{2}\frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{(p-a)^2+3r_a\delta_a}.$$

où $\delta = 4R + r$ et $\delta_a = 4R - r_a$.

(E. Lemoine.)

395. — On donne un cercle, une droite qui ne le rencontre pas et une autre droite, et l'on considère le rapport de la longueur de la tangente au cercle issue d'un point quelconque de la première droite avec la distance du même point à la seconde. Démontrer que ce rapport sera le plus petit possible lorsque le point se trouvera sur la polaire de l'intersection des deux droites par rapport au cercle. *(A. Tissot.)*

396. — Si le triangle $A_1A_2A_3$, de forme invariable, se meut dans son plan, de manière que les sommets A_1 et A_2 parcourent deux figures inversement semblables, le troisième sommet A_3 décrit une figure de même ordre que les figures F_1 et F_2, ou

bien une ligne droite qui passe par le point double des figures F_1 et F_2 (*). *(G. Tarry.)*

397. — On donne une circonférence et l'un de ses diamètres *ab*. D'un point *o*, pris arbitrairement sur la circonférence donnée, comme centre, avec *ob* pour rayon, on décrit un arc de cercle. Cet arc coupe en *c* le diamètre *ab* et en *d* la circonférence donnée. Démontrer que la droite *cd* est perpendiculaire à la droite *ao*. *(Mannheim.)*

398. — D'un point M on mène à une parabole P des tangentes MA, MB qui coupent l'axe de cette parabole respectivement aux points A′, B′. Démontrer que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}.$$

(G. L.)

ERRATA

Page 109;

1° Ligne 3 (en remontant), *lire* λ — A, *au lieu de* 3λ — A;
2° Ligne 5 (en remontant), *lire* λ, *au lieu du* premier A;
3° Ligne 13 (en remontant), *lire* de l'autre *au lieu de* l'axe.
4° *Au lieu de* Loreau, *lisez* Lormeau.

Page 120;

1° Ligne 9, renversez le rapport $\frac{AB}{AF}$;
2° Ligne 16, *au lieu de* ainsi, *lisez* mais.

(*) La remarque faite (*Journal* 1888, p. 117), n'est qu'un cas très particulier du théorème en question.

M. Schoute, dans son Mémoire *sur les figures directement semblables* a donné un théorème analogue sur les figures de similitude constante.

Si deux points d'une pareille figure décrivent deux courbes directement semblables, tous les points de la figure décrivent des courbes directement semblables.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 41156-5-91.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Rernès,**

(*Suite*, voir page 121.)

EXEMPLES DE POINTS SYMÉTRIQUEMENT INVERSES, ET PREMIÈRES APPLICATIONS DE LA MÉTHODE

7. — 1° *Centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits* I, I_a, I_b, I_c. I et I_a sont transformés l'un de l'autre; et, de même, I_b et I_c. Car l'isogonal de I est le point I lui-même et l'isocyclique est I_a, etc. On le voit aussi directement par la similitude de AIB, ACI_a, qui donne $AI.AI_a = bc$.

2° Transformé du centre O du cercle ABC. *Ce transformé est le point* A′, *symétrique de* A *relativement à* BC. Car O a pour isogonal l'orthocentre H, et celui-ci a pour isocyclique A′.

3° Transformé de l'orthocentre H. C'est l'isocyclique L de O, dont il a été déjà parlé à la fin du § IV.

Comme les angles de LBC sont égaux aux coordonnées angulaires de O, 2A, 2B, 2C, ce point L est à la rencontre des droites symétriques de BC, relativement à CA et BA.

D'après (VI 1°) *la droite* A′L *est parallèle à* HO ; A′ *et* L *sont isogonaux.*

Si les perpendiculaires à AB *en* B, *à* AC *en* C *rencontrent respectivement* AC *en* E, AB *en* F, *le point* L *est aussi la projection de* A *sur* EF. Les points E, F sont en effet les transformés des pieds H_3, H_2 des hauteurs issues de C et B et la droite EF est la transformée de la circonférence décrite sur AH comme diamètre. Puisque cette circonférence est orthogonale à AH, EF l'est à la droite AO sur laquelle est L.

Si T est la rencontre des tangentes en B, C à circonférence ABC, L *est la projection de* T *sur* AO; car OT est le diamètre de la circonférence OBC.

La droite TL se confond ainsi avec EF et comme EF est antiparallèle à BC, T qui est sur la symédiane est le milieu de EF.

4° Sommet de Brocard. *La projection* ϖ *du centre* O *sur la symédiane* AT *a pour transformé le symétrique* A_1 *de* A *relativement au milieu* D *de* BC.

En effet, si d est le point où la symédiane rencontre la circonférence ABC, c'est-à-dire le transformé de D, comme ϖ est le milieu de Ad, on a

$$A\varpi . AA_1 = Ad . AD = bc.$$

Cela résulte aussi (en vertu de VI, 2°) de ce que $A'A_1$ est parallèle à BC ou perpendiculaire à AH; par suite, $AO\varpi$ est semblable à AA_1A'; et comme A' est le transformé de O, A_1 l'est de ϖ.

Les droites A_1B, A_1C étant parallèles à AC, AB, il s'ensuit cette propriété connue de ϖ que *ce point est à la rencontre de la circonférence qui passe par* A, C *tangentiellement à* AB *et de la circonférence qui passe par* A, B *tangentiellement à* AC. Ces deux circonférences sont en effet les transformées de A_1B, A_1C.

Les angles du triangle A_1BC étant $-A$, $-C$, $-B$, il en résulte que *les coordonnées angulaires de* ϖ *sont* $A-(-A)$, $B+C$, $C+B$ *ou* $2A$, $-A$, $-A$.

La corde AG menée par A parallèlement à BC dans une circonférence ABC étant égale à $A'A_1$, circonférence $AA'A_1$ passe par G, ce qui se transforme ainsi : *la droite* $O\varpi$ *et la tangente en* A *à une circonférence* ABC *concourent sur* BC.

Inversement, la propriété : $H_1\varpi$ *passe par le milieu de la médiane* AD *(où* H_1 *est le pied de la hauteur* AH*)* se transforme en cette autre : *Si* $Ad' = 2Ad$ *et que* S *soit le point diamétralement opposé à* A, *dans la circonférence* ABC, *les trois points* d', S, A_1 *sont sur une même circonférence avec* A.

Et ainsi, chaque propriété de l'un des points a sa corrélative dans l'autre.

5° Projection φ de l'orthocentre A sur la médiane AD. *Ce point* φ *a pour transformé le point de concours* T *des tangentes en* B, C *à la circonférence* ABC.

Car la circonférence HBC ayant HA_1 pour diamètre passe par φ; l'isocyclique de φ est donc A_1; et, comme il est visible que A_1 et T sont isogonaux, T est le transformé de φ.

De là les propriétés suivantes :

φ et ϖ sont isogonaux et la droite $\varpi\varphi$ est parallèle à TA_1.

Le point φ est la rencontre des circonférences tangentes à BC *et*

passant l'une par A *et* C, *l'autre par* A *et* B. Ces circonférences sont en effet les transformées de BT, CT.

Les coordonnées angulaires de φ *sont* — A, — C, — B; car les angles de TBC sont 2A, — A, — A.

Le pied D *de la médiane est équidistant de* φ *et du point* Δ *où la médiane rencontre la circonférence* ABC. Cela résulte de ce que si δ est le pied de la symédiane, A*d* est divisé harmoniquement par δ et T. Il suit de là *que* φ *et* d *sont symétriques relativement à* BC.

Les distances φB, φC *sont proportionnelles à* c *et* b. Cette propriété résulte de l'égalité TC = TB. Ou encore de ce que le cercle d'Apollonius relatif à l'angle A a pour transformé la perpendiculaire au milieu de BC, droite passant par T.

Nous ferons plus loin l'application de la méthode aux points de Brocard, au centre de gravité, au point de Lemoine, aux centres isodynamiques et isogones et à leurs transformés.

Mais il convient d'interrompre ces propriétés de détail pour passer à des applications plus générales.

SUITE DES APPLICATIONS DE LA MÉTHODE

8. — Si l'on considère une droite qui rencontre en E, F, les côtés AC, AB; pour construire la circonférence qui en est la transformée, il suffit de mener, par C, B, des parallèles à BE, CF qui rencontrent AB, AC en *e*, *f*. Ces points sont les transformés de E, F et la circonférence A*ef* est la transformée de EF.

Et, par une construction inverse, on peut, de la circonférence A*ef*, déduire sa transformée EF.

De là cette construction générale du point *m*, transformé de M :

On fait passer par A *et* M *deux circonférences quelconques, on construit leurs transformées, comme il vient d'être dit, le point* m *est à leur rencontre.*

Mais on abrège en adoptant dans cette construction les circonférences ABM, ACM. *Si elles coupent* AC, AB *en* E, F, *le point* m *est à la rencontre des parallèles à* BE, CF *menées par* C *et* B. — Ou bien encore *si les parallèles menées par* C *à* BM

et par B *à* CM *rencontrent* AB *en* e, AC *en* f, *le point* m *est à la rencontre des circonférences* ACe, ABf.

Ceci conduit aux théorèmes généraux qui suivent.

Théorème 1. — *Si l'on joint deux points fixes* B, C *à un point variable* M *d'une courbe* G *quelconque et que les parallèles à* BM, CM *menées par* C *et* B *rencontrent deux droites fixes* BA, CA *en* e, f, *le lieu de la rencontre* m *des circonférences* ACe, ABf *est une courbe symétriquement inverse de* G *relativement à* A. (AB × AC étant la puissance d'inversion.)

Théorème 2. — *Si* m *est un point variable d'une courbe* g; *si* A, B, C *sont trois points fixes, et que les circonférences* ABm, ACm *rencontrent* AC, AB *en* e, f, *le lieu de la rencontre* M *des parallèles menées par* C *à* Be *et par* B *à* Cf *est une courbe symétriquement inverse de* g, *relativement à* A.

Ces deux théorèmes sont les deux faces d'une même propriété. Les deux suivants s'en déduisent.

Théorème 3. — *Si* N *est un point variable d'une courbe* G *et si* E, F *sont les points où la circonférence* ABN *et la circonférence* ACN *rencontrent* AC, AB, *le lieu de la rencontre* m *des droites* BE, CF *est une courbe égale a l'inverse symétrique de* G.

En effet, les parallèles menées, par C à BE, par B à CF, se coupent en un point M qui, d'après le théorème 2, décrit l'inverse symétrique de G. Or N et M sont symétriques l'un de l'autre relativement ~~à BC~~; donc le lieu de N est une courbe égale à la courbe décrite par M.

Théorème 4. — *Si* N *est un point variable d'une courbe* G, *et* e, f, *les points où* CN, BN *rencontrent* AB, AC, *le lieu de la rencontre* M *des circonférences* ACe, ABf *est une courbe symétriquement inverse, relativement à* A, *d'une courbe égale à* G.

Car si les parallèles menées par B à Ce, par C à B*f* se rencontrent en *m*, le lieu de M est l'inverse symétrique du lieu de *m*, d'après le théorème 1. Or *m* et N sont symétriques l'un de l'autre relativement au milieu de BC. Donc le lieu de *m* est une courbe égale à G.

(A suivre.)

COORDONNÉES QUADRIPOLAIRES

par M. **L. Bénézech.**

(*Suite et fin*, voir p. 127.)

18. — Equation d'un plan mené par un point (λ'_3, λ'_4) perpendiculairement à l'arête A_3A_4.

Équation tripolaire d'une droite menée par un point (λ'_3, λ'_4), perpendiculairement au côté A_3A_4 du triangle de référence $A_2A_3A_4$.

L'équation cherchée a la forme;

$$\alpha_3\lambda_3^2 + \alpha_4\lambda_4^2 + K = 0,$$

avec

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

D'ailleurs,

$$\alpha_3\lambda_3'^2 + \alpha_4\lambda_4'^2 + K = 0;$$

d'où l'équation demandée :

$$\begin{vmatrix} \lambda_3^2 & \lambda_3'^2 & 1 \\ \lambda_4^2 & \lambda_4'^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_3^2 - \lambda_4^2(\lambda_3'^2 - \lambda_4'^2) = 0,$$

résultats évidents *a priori*.

19. — Puissance p d'un point $P(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4)$, par rapport à une sphère C′ dont on connaît l'équation en coordonnées quadripolaires.

L'équation de la sphère peut s'écrire ainsi :

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \Sigma a_1\lambda_1^2 - \Sigma a_1\overline{CA_1}^2 - V\rho^2 = 0.$$

D'ailleurs, en appelant d la distance PO, on a

$$\Sigma\alpha_1\lambda_1'^2 - \Sigma\alpha_1\overline{CA_1}^2 - Vd^2 = 0,$$

ou bien

$$\Sigma\alpha_1\lambda_1'^2 - \Sigma\alpha_1\overline{CA_1}^2 - V(d^2 - \rho^2) - V\rho^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{\Sigma\alpha_1\lambda_1'^2 - \Sigma\alpha_1\overline{CA_1}^2 - V\rho^2}{V} = \frac{f(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4)}{V}.$$

La puissance d'un point, par rapport à une sphère dont on connaît l'équation en coordonnées quadripolaires, s'obtient donc en multipliant par $\frac{1}{V}$ ce que devient le premier membre

de cette équation lorsqu'on y remplace les coordonnées courantes par les coordonnées du point donné.

(Il est bien entendu que si α_1, α_2 ... représentent des quantités proportionnelles aux coordonnées barycentriques du centre de la sphère, V représente la somme de ces coefficients ($V = \Sigma\alpha_1$).

Application. — Condition pour que la sphère $\Sigma\alpha_1\lambda_1^2 + K = 0$ coupe orthogonalement la sphère circonscrite au tétraèdre de référence.

Ecrivons que la puissance du centre de celle-ci, par rapport à la première, est égale à R^2, il vient

$$\frac{R^2\Sigma\alpha_1 + K}{\Sigma\alpha_1} = R^2;$$

d'où le résultat connu $\qquad K = 0.$

20. — Condition pour que les deux sphères $\Sigma\alpha_1'\lambda_1^2 + K' = 0$, $\Sigma\alpha_1''\lambda_1^2 + K'' = 0$ se coupent orthogonalement.

ρ', ρ'', d désignant les rayons de ces sphères et la distance de leurs centres, on a

$$\rho'^2 = \frac{-K'V - \Sigma\alpha_1'\alpha_2'd_{12}}{V^2}, \qquad \rho''^2 = \frac{-K''V - \Sigma\alpha_1''\alpha_2''d_{12}}{V^2},$$

$$d^2 = -\frac{\Sigma d_{12}(\alpha_1' - \alpha_1'')(\alpha_2' - \alpha_2'')}{V^2}.$$

La condition cherchée est donc

$$\Sigma d_{12}(\alpha_1' - \alpha_2'')(\alpha_2' - \alpha_2'') = \Sigma\alpha_1'\alpha_2'd_{12} + \Sigma\alpha_1''\alpha_2''d_{12} + V(K' + K'')$$

ou bien $\qquad \Sigma d_{12}(\alpha_1'\alpha_2'' + \alpha_2'\alpha_1'') + V(K' + K'') = 0.$

On déduit aisément de ce résultat la condition pour que les deux plans $\Sigma\alpha_1'\lambda_1^2 + K' = 0$, $\Sigma\alpha_1''\lambda_1^2 + K'' = 0$ soient perpendiculaires. On trouve

$$\Sigma d_{12}(\alpha_1'\alpha_2'' + \alpha_2'\alpha_1'') = 0.$$

Par la même méthode, on trouve sans peine les résultats correspondants de la géométrie du triangle.

21. — Equation d'une sphère coupant orthogonalement la sphère circonscrite au tétraèdre de référence et passant par les points $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_4')$, $(\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3'', \lambda_4'')$, $(\lambda_1''', \lambda_2''', \lambda_3''', \lambda_4''')$.

Elle est de la forme

$$\alpha_1\lambda_1^2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \alpha_3\lambda_3^2 + \alpha_4\lambda_4^2 = 0.$$

De plus, on a

$$\alpha_1\lambda_1'^2 + \alpha_2\lambda_2'^2 + \alpha_3\lambda_3'^2 + \alpha_4\lambda_4'^2 = 0,$$
$$\alpha_1\lambda_1''^2 + \alpha_2\lambda_2''^2 + \alpha_3\lambda_3''^2 + \alpha_4\lambda_4''^2 = 0,$$
$$\alpha_1\lambda_1'''^2 + \alpha_2\lambda_2'''^2 + \alpha_3\lambda_3'''^2 + \alpha_4\lambda_4'''^2 = 0;$$

d'où, en éliminant $\alpha_1 \ldots$, l'équation cherchée :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1'^2 & \lambda_1''^2 & \lambda_1'''^2 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2'^2 & \lambda_2''^2 & \lambda_2'''^2 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3'^2 & \lambda_3''^2 & \lambda_3'''^2 \\ \lambda_4^2 & \lambda_4'^2 & \lambda_4''^2 & \lambda_4'''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Applications. — 1° Equation de la sphère coupant orthogonalement la sphère circonscrite au tétraèdre de référence et passant par les sommets A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & d_{21} & d_{31} & d_{42} \\ \lambda_2^2 & 0 & d_{32} & d_{42} \\ \lambda_3^2 & d_{23} & 0 & d_{43} \\ \lambda_4^2 & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque le tétraèdre de référence est régulier, les points de la sphère considérée vérifient la relation

$$2\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2.$$

2° Equation du cercle orthogonal au cercle circonscrit au triangle de référence, passant par le sommet A et le point $(\lambda_0\mu_0\nu_0)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & 0 & \lambda_0^2 \\ \mu^2 & c^2 & \mu_0^2 \\ \nu^2 & b^2 & \nu_0^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(c^2\nu_0^2 - b^2\mu_0^2) + \mu^2 b^2\lambda_0^2 - \nu^2 c^2\lambda_0^2 = 0.$$

SUR LA PERSPECTIVE D'UNE FIGURE PLANE

Par M. **C. A. Laisant.**

1. — Soit ABC un triangle, projeté, en perspective, suivant A'B'C', sur un nouveau plan, par des droites issues d'un point fixe O. Un point M du plan ABC étant projeté en M', et les coordonnées barycentriques de M étant α, β, γ par rapport au triangle de référence ABC; nous nous proposons de déterminer les coordonnées barycentriques α', β', γ', de M', par rapport à A'B'C'.

Si nous posons, comme on peut toujours le faire,

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \qquad \alpha' + \beta' + \gamma' = 1,$$

nous avons :

$$OM = \alpha OA + \beta OB + \gamma OC,$$
$$OM' = \alpha' OA' + \beta' OB' + \gamma' OC'.$$

Écrivons, en outre :

$$\frac{OA'}{OA} = p, \quad \frac{OB'}{OB} = q, \quad \frac{OC'}{OC} = r, \qquad \frac{OM'}{OM} = \lambda.$$

Alors

$$\lambda(\alpha OA + \beta OB + \gamma OC) = \alpha' p OA + \beta' q OB + \gamma' r OC.$$

De là, nous tirons

$$\alpha\lambda = \alpha' p, \qquad \beta\lambda = \beta' p, \qquad \gamma\lambda = \gamma' r. \qquad \text{(A)}$$

Ainsi, α', β', γ' sont proportionnelles à $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{q}$, $\frac{\gamma}{r}$, c'est-à-dire que ces trois dernières quantités sont les coordonnées barycentriques homogènes cherchées.

Incidemment, nous voyons que le rapport λ, ou $\frac{OM'}{OM}$, est égal à

$$\alpha' p + \beta' q + \gamma' r = \frac{1}{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r}}.$$

L'équation de l'intersection des deux plans ABC, A'B'C' est, dans le plan ABC :

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r} = \alpha + \beta + \gamma,$$

ou
$$\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \beta\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \gamma\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 0,$$

et celle de la même intersection, dans le plan A'B'C' :

$$\alpha' p + \beta' q + \gamma' r = \alpha' + \beta' + \gamma',$$

ou
$$\alpha'(p - 1) + \beta'(q - 1) + \gamma'(r - 1) = 0.$$

L'équation homogène d'une ligne quelconque étant

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

dans le plan ABC, l'équation de la perspective de cette ligne, sur le plan A'B'C', sera

$$f(\alpha' p, \beta' q, \gamma' r) = 0.$$

Si l'on détermine le nouveau plan A'B'C' en prenant, pour p, q, r, des quantités proportionnelles aux coordonnées α, β, γ du point M, le point M' sera le barycentre du triangle A'B'C'.

2. — Comme unique application, nous nous proposons le problème suivant :

Étant donnés le point O *et* A, B, C, M, *couper le trièdre* OABC *par un plan passant par* M, *de telle sorte que dans la section* A′B′C′ *faite par ce plan,* M *soit le barycentre de* A′B′C′.

Puisque M est à lui-même sa propre perspective, on a $\lambda = 1$.

Les formules (A), dans lesquelles on doit supposer $\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{1}{3}$, donnent

$$p = 3\alpha, \quad q = 3\beta, \quad r = 3\gamma.$$

Si, maintenant, on veut prendre, α, β, γ comme coordonnées homogènes quelconques, en ne supposant plus $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on aura

$$p = \frac{3\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}, \qquad q = \frac{3\beta}{\alpha + \beta + \gamma}, \qquad r = \frac{3\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Telles sont les valeurs de

$$\frac{OA'}{OA}, \qquad \frac{OB'}{OB}, \qquad \frac{OC'}{OC}$$

qui déterminent le plan A′B′C′.

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION
DE M. SCHOUTE

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 101.)

Applications. — Jusqu'ici quatre couples de points jumeaux ont surtout été étudiés. 1° Les centres isogones V_2, W_2 qu'une Note récente (*J. S.* 1889) de M. Boutin, résumant et complétant les travaux antérieurs, a fait connaître aux lecteurs du *Journal de Mathématiques spéciales*. 2° et 3° Les deux groupes Ω, ρ et Ω', ρ' formés, chacun, par un des points de Brocard Ω, Ω' et par l'un des points isobariques ρ, ρ' du point de Steiner. Les propriétés des points ρ et ρ' ont été indiquées par M. Neu-

berg dans *Mathesis* (1886, p. 5) et dans une note *sur le point de Steiner* parue ici-même (*J. S.*, 1886). 4° M. Fuhrmann a enfin donné (*Mathesis*, 1890, p. 105) plusieurs propositions se rapportant au centre du cercle inscrit et à son jumeau.

7. — Au moyen des formules précédentes de transformation, on obtient sans peine tous les résultats trouvés géométriquement par M. Schoute.

A la droite $lx + my + nz = 0$,

correspond la quintique

$$(9) \qquad \Sigma lx(4Sy\cos B - K)(4Sz\cos C - K) = 0,$$

ou

$$(10) \quad 16xyzS^2\Sigma l\cos B\cos C - 4SK\Sigma lx(y\cos B + z\cos C) + K^2\Sigma lx = 0.$$

Ces deux formes mettent en évidence les six points doubles communs à toutes ces quintiques.

On voit immédiatement que chacun des trois termes du premier membre de l'équation (10) s'annule deux fois pour chacune des quatre hypothèses :

$$y = z = 0, \quad x = z = 0, \quad x = y = 0, \quad S = K = 0,$$

ce qui démontre que les sommets A, B, C, du triangle et les points circulaires à l'infini ω et ω' communs aux courbes qui correspondent aux équations $S = 0$, $K = 0$, sont des points doubles de la courbe.

Remarquons que les circonférences correspondant aux équations

$$(11) \quad 4Sx\cos A - K = 0, \quad 4Sy\cos B - K = 0, \quad 4Sz\cos C - K = 0,$$

dont les paramètres satisfont à la relation (7), où

$$l = \frac{1}{2\cos A}, \qquad m = \frac{1}{2\cos B}, \qquad n = \frac{1}{2\cos C}$$

se coupent à l'orthocentre ($x\cos A = y\cos B = z\cos C$) du triangle ABC. Donc la substitution des coordonnées de ce point, dans l'équation (9), annule deux facteurs dans chacun des trois termes du premier membre, ce qui montre que l'orthocentre H est le sixième point double commun. Ainsi, A, B, C, H, ω et ω' *sont les six points fondamentaux de la transformation de M. Schoute.*

On reconnaît immédiatement que les cercles (11) corres-

pondent aux sommets A, B, C du triangle. En effet, l'hypothèse $l = 0$ transforme l'équation (9) en la suivante :

$$(4Sx\cos A - K)[my(4Sz\cos C - K) + nz(4Sy\cos B - K)] = 0,$$

celle-ci prouve que le cercle $4Sx\cos A - K = 0$ fait partie de la quintique, quelle que soit la valeur du rapport $\frac{m}{n}$. De la même manière, on trouve $K = 0$ pour la courbe qui correspond à l'orthocentre ; c'est-à-dire que le cercle circonscrit tout entier correspond au seul point H.

Lorsque la droite passe par l'un des points fondamentaux, la quintique correspondante devient une courbe du troisième degré qui passe deux fois par le point fondamental situé sur la droite et une seule fois par les autres points fondamentaux. Quand la droite passe par deux points fondamentaux, elle est sa propre transformée. Donc :

Dans la transformation de M. Schoute, les six côtés du quadrangle complet ABCH *se correspondent à eux-mêmes, et chaque sommet a pour transformé la circonférence qui passe par les trois autres sommets.*

Si le point (x', y', z') est à l'infini, on a $S' = 0$ et les formules (8) donnent

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Ainsi, *les points de la droite de l'infini se correspondent à eux-mêmes.*

8. — Nous énoncerons maintenant quelques propositions qui se déduisent facilement des résultats précédents et sur lesquelles nous n'insisterons pas davantage. On en trouvera, d'ailleurs, d'élégantes démonstrations géométriques dans le travail de M. Schoute, que nous avons déjà signalé.

1° *La correspondante d'une conique est une courbe du dixième degré.* Elle devient une conique, si la courbe primitive passe par quatre points fondamentaux. Si la conique est une hyperbole équilatère, elle coïncide avec sa transformée ; autrement dit : *Les hyperboles équilatères circonscrites à* ABC *sont des courbes anallagmatiques dans la transformation par points ju-*

meaux. Au moyen de l'équation (6) on vérifiera que *la droite qui joint deux points correspondants passe par le centre de la courbe.* Donc, d'après une propriété connue, *la circonférence des neuf points est le lieu des milieux des droites qui joignent deux points jumeaux.*

2° *Les cercles décrits sur les côtés du quadrangle complet* ABCH *comme diamètres se correspondent à eux-mêmes.* Il en est de même des pieds H_a, H_b, H_c des hauteurs du triangle ABC.

3° La transformation ne change pas quand, au lieu de ABC, on prend pour triangle de référence un des trois triangles BHC, CHB, BHA.

4° *La courbe correspondante d'une courbe du troisième degré est une courbe du quinzième degré.* Si la courbe primitive passe par les six points fondamentaux, sa transformée est du troisième ordre. Le faisceau F de courbes de troisième ordre passant par les six points fondamentaux et par les pieds H_a, H_b, H_c des hauteurs est anallagmatique.

9. — Chaque droite du plan contient deux couples de points jumeaux, car elle coupe la quintique qui lui correspond, en dehors de la droite de l'infini, en quatre points.

Cherchons le lieu des points jumeaux situés sur une droite passant par un point $M(x_1, y_1, z_1)$ quand elle tourne autour de ce point.

D'après ce qui précède, si

$$lx + my + nz = 0$$

est l'équation de la droite, on obtient le lieu cherché en éliminant l, m, n entre les trois équations :

$$lx + my + nz = 0,$$

$$lx_1 + my_1 + nz_1 = 0,$$

$$\Sigma lx(4Sy \cos B - K)(4Sz \cos C - K) = 0.$$

On trouve ainsi

$$\Sigma yzx_1(4Sx \cos A - K)(y \cos B - z \cos C) = 0;$$

c'est l'équation d'une quintique.

En adoptant la terminologie proposée dans ce Journal (1889, p. 265) par M. Boutin, nous dirons que cette courbe est la *quintique des jumeaux relative au point* $M(x_1, y_1, z_1)$. Les points A, B, C, H sont des points doubles de la courbe; elle passe une

seule fois par H_a, H_b, H_c, ω, ω'; elle touche la droite de l'infini en ω et ω' (*).

En particulier, quand le point M se trouve sur la circonférence des neuf points de ABC, la quintique se compose d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C, H, M et d'une courbe du troisième ordre passant par les six points fondamentaux et par les pieds des hauteurs de ABC. Cette courbe du troisième ordre fait partie du faisceau F que nous avons rencontré ci-dessus : elle se correspond à elle-même.

Les droites qui passent par les points qui se correspondent sur une courbe F, passent par un même point, le sixième point d'intersection de la courbe avec la circonférence des neuf points.

En particulier, la quintique des jumeaux, relative à un point M, milieu d'un des côtés du quadrangle complet ABCH, se décompose en trois parties : une hyperbole équilatère, une circonférence et une droite. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(Suite.)

le centre ... Taylor
cercle ... on KO

163. — *Dans tout triangle, le diamètre de Brocard,* KO, *contient le point complémentaire du centre du cercle inscrit au triangle orthocentrique.*

Les coordonnées barycentriques de ce point (α', β', γ') sont, en prenant le triangle orthocentrique pour triangle de référence :

$$\frac{\alpha'}{\sin 2B + \sin 2C} = \frac{\beta'}{\sin 2A + \sin 2C} = \frac{\gamma'}{\sin 2A + \sin 2B}.$$

Si α, β, γ sont les coordonnées barycentriques du même point par rapport à ABC, un changement de coordonnées donne

---

(*) Nous ferons remarquer en passant, pour compléter la *Note bibliographique sur les cubiques* (J. S. 1890, pp. 63-66), que M. Schoute a étudié (*loc. cit.* p. 157) les cubiques des inverses relatives à un point et qu'il en a fait connaître plusieurs propriétés retrouvées par M. Boutin. M. Schoute a également indiqué les courbes du quatrième, du cinquième et du sixième ordre, qui se transforment en elles-mêmes dans la transformation par points inverses.

$$\frac{\alpha}{a} : \frac{\sin 2A + \sin 2B}{c} \cos B + \frac{\sin 2A + \sin 2C}{b} \cos C, \ldots$$

$$\frac{\alpha}{a} : \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C . \sin A - \cos A, \ldots$$

Avec les valeurs de α, β, γ on vérifie facilement le théorème énoncé.

164. — *Dans un triangle quelconque, on a :*

$$4s = \sum a^2 \operatorname{cotg} A.$$

En effet :

$$\begin{aligned} 4S &= 8R^2 \sin A \sin B \sin C \\ &= 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\ &= 4R^2 (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C), \\ &= 4R^2 (\sin^2 A \operatorname{cotg} A + \sin^2 B \operatorname{cotg} B + \sin^2 C \operatorname{cotg} C), \\ &= a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C. \end{aligned}$$

165. — *La distance de l'orthocentre* H *au point de Lemoine* K *(θ étant l'angle de Brocard), est donnée par la formule :*

$$\overline{KH}^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \theta} (\sin^2 \theta - 4 \cos A \cos B \cos C \cos 2\theta)$$

166. — *Si* x, y, z, *désignent les distances des sommets d'un triangle, à un point quelconque de la circonférence inscrite, on a*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{1}{2} Sr.$$

D'une manière générale, si δ_a, δ_b, δ_c sont les distances d'un point quelconque aux trois sommets du triangle de référence; le lieu des points tels que

$$\lambda \delta_a^2 + \mu \delta_b^2 + \nu \delta_c^2 = K$$

est une circonférence.

Le centre est le point de coordonnées barycentriques α, β, γ, telles que

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{\gamma}{\nu};$$

son rayon ρ est donné par la formule

$$\rho^2 = \frac{K(\lambda + \mu + \nu) - a^2\mu\nu - b^2\lambda\nu - c^2\lambda\mu}{(\lambda + \mu + \nu)^2}.$$

Ces égalités résultent facilement de considérations générales sur les coordonnées tripolaires; elles donnent lieu à des applications nombreuses :

Le point pour lequel $a^2\delta_a^2 + b^2\delta_b^2 + c^2\delta_c^2$ est minimum est le point de Lemoine; la valeur du minimum est :

$$K = 3Rabc \operatorname{tg} \theta.$$

167. — *Déterminer le point du plan du triangle tel que,* x, y, z *étant ses coordonnées normales,* $ax^2 + by^2 + cz^2$ *soit minimum.*

Ce point est le centre du cercle inscrit (propriété bien connue), en voici une démonstration très élémentaire :

On a l'identité :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{1}{2p}(ax + by + cz)^2 + \frac{ab}{2p}(x - y)^2 + \frac{ac}{2p}(x - z)^2 + \frac{bc}{2p}(y - z)^2.$$

Le premier terme étant constant, le minimum aura lieu quand les trois autres s'annuleront ; ce qui a lieu pour

$$x = y = z.$$

168. — Trouver le point du plan du triangle tel que

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

soit minimum, X, Y, Z étant les distances aux sommets.

D'après les formules rappelées au n° 166, le point cherché est le centre du cercle inscrit. On peut y parvenir autrement :

Soient x, y, z les coordonnées normales du point cherché.

On a $$X^2 \sin^2 A = y^2 + z^2 + 2yz \cos A;$$

et la fonction dont on cherche le minimum est :

$$\sum \frac{1}{a}(y^2 + z^2 + 2yz \cos A).$$

Les équations du minimum sont :

$$\begin{aligned}(b + c)x + by \cos C + cz \cos B \\ = ax \cos C + (a + c)y + cz \cos A \\ = ax \cos B + by \cos A + (a + b)z.\end{aligned}$$

Si l'on résout ce système, on trouve, après calcul,

$$x = y = z.$$

Le centre du cercle inscrit jouit donc de cette propriété curieuse d'être le point qui correspond au minimum de la même fonction $ax^2 + by^2 + cz^2$ des distances aux côtés et des distances aux sommets du triangle de référence. *(A suivre.)*

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(Concours de 1891.)

Calcul logarithmique (De 7 h. 30 à 8 h. 30.)

On donne dans un triangle :

$$A = 112^r\ 28'\ 47'',3, \qquad b = 26734, \qquad c = 96879,$$

Calculer B, C et a.

Mathématiques (De 8 h. 45 à 11 heures.)

I. — Dans un triangle BAC rectangle en A on connaît la hauteur h abaissée sur l'hypoténuse et la médiane m issue du sommet B. Déterminer l'hypoténuse par le calcul. Discussion ; construction du triangle (*).

(*) Soit D le milieu de AC. En prenant DB′ = BD, le triangle DCB′ est égal à DAB ; il est donc rectangle en C. Abaissons B′K perpendiculaire

II. — On donne deux droites parallèles, une perpendiculaire commune $AB = 2a$, et le milieu O de AB. On fait tourner un angle droit A'OB' autour de son sommet O. Démontrer :

1° Que le produit $AA' \times BB'$ est constant ;

2° Que A'B' est constamment égale à $AA' + BB'$;

3° Que la droite A'B' reste tangente à un cercle fixe;

4° Par le milieu I de la hautieur OH on mène une parallèle à chacun des côtés du triangle A'OB' et l'on considère les points où elle rencontre les deux autres côtés. Démontrer que les six points ainsi obtenus sont situés sur une même circonférence;

5° Minimum du rayon de cette circonférence.

Épure (2 h. 1/2.)

Un tétraèdre SABC, dont l'angle trièdre S est trirectangle, a sa base ABC sur le plan horizontal. AB est sur la ligne de terre (A vers la gauche) et a pour longueur 140^{mm}. La projection horizontale du sommet S est un point s dont les distances aux points A et B sont :

$$As = 105^{mm} \quad \text{et} \quad Bs = 49^{mm}.$$

Construire ce tétraèdre, puis son intersection avec la sphère ayant S pour centre et passant par le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Dans la mise à l'encre on représentera la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère S.

ÉCOLE NAVALE

(CONCOURS DE 1891)

Arithmétique et Algèbre.

I. — En mesurant l'hypoténuse a et le côté b d'un triangle rectangle ABC, on a trouvé

$$a = 75 \text{ mètres à } \pm 0^m,2 \text{ près},$$
$$b = 32 \text{ mètres à } \pm 0^m,1 \text{ près}.$$

---

sur BC. Dans le triangle rectangle BB'K on connaît l'hypoténuse $BB' = 2m$ et le côté $B'K = h$. On construit le triangle (en supposant $2m > h$); puis, ayant pris D, milieu de BB', sur B'D on décrit une demi-circonférence qui coupe BK en deux points, si la distance $\frac{3h}{4}$ du milieu de B'D à BK est plus petit que $\frac{m}{2}$. On a donc la condition unique :

$$2m \geqslant 3h.$$

Si l'on traite la question par l'Algèbre, on est conduit, pour calculer l'hypoténuse a, à l'équation

$$4a^4 - a^2(20m^2 - 9h^2) + 16m^4 = 0.$$

Toute équation bi-carrée dont le dernier terme est carré parfait (v. Alg. § 184) peut être résolue par des *radicaux simples*. C'est ainsi que, en appliquant la tranformation connue, on trouve

$$4a = \pm 3\sqrt{4m^2 - h^2} \pm \sqrt{4m^2 - 9h^2}, \text{ etc.}$$

On demande l'approximation avec laquelle on pourra obtenir l'angle B avec ces données.

II. — Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}}.$$

Construction de la courbe pour le cas où $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

III. — Étant donné un angle AOE $= \varphi$, on partage cet angle en n parties égales; sur l'un de ses côtés on porte une longueur OA égale à l'unité et l'on mène AB faisant avec OA un autre angle donné α.

Au point B, on mène BC faisant avec OB le même angle. On demande la limite vers laquelle tend le segment OE, quand n croît indéfiniment.

Géométrie cotée.

XX′ est la trace horizontale d'un plan P qui fait un angle de 40° avec le plan horizontal; O′ est la projection horizontale d'un point O dont la cote verticale est de 62^{mm}, la distance O′ω de O′ à XX′ étant de 48^{mm}.

1° Tracer la projection cotée d'une droite (D) passant par le point O, parallèle au plan P et faisant un angle de 25° avec le plan horizontal; mener par cette droite un plan Q, perpendiculaire au plan P, construirs les traces du plan Q sur le plan horizontal et sur le plan P;

2° Tracer la projection cotée d'un tétraèdre régulier OABC dont le point O est un sommet, dont la droite (D) est un axe, dont un des côtés BC est situé dans le plan P, et dont par conséquent le plan Q est un plan; de symétrie.

Calcul trigonométrique.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - 157^\circ\right) = \frac{(0{,}00167)^2 \times \operatorname{tg}^4 133^\circ\, 21'\, 12''}{\sin^3 67^\circ\, 19'\, 25'' \times \cos^5 260^\circ\, 14'\, 17'',5}$$

x compris entre 0° et 360°.

Géométrie et Géométrie analytique.

I. — Géométrie.

Triangles sphériques polaires.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés.

II. — Géométrie analytique.

Étant donné un cercle

$$x^2 + (y - \gamma)^2 = R^2,$$

rapporté à des axes rectangulaires oxy et qui coupe l'axe des x en deux points A et A′, on considère un point quelconque M de ce cercle défini par l'angle φ que le rayon CM fait avec l'axe des x:

Trouver l'équation générale des coniques passant, par les points A et A′ et tangentes en M à la circonférence C; démontrer que toutes ces coniques ont leurs axes parallèles; trouver la direction de ces axes.

Parmi ces coniques on considérera:

1° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction de

l'axe des y sont conjuguées. Déterminer géométriquement son centre et ses axes en grandeur et direction. Lieu du centre quand le point M parcourt la circonférence C ;

2° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction de l'axe des x sont conjuguées. Mêmes questions que pour la précédente.

On exprimera en coordonnées polaires le lieu du centre.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(SESSION D'OCTOBRE 1890, PARIS)

20 octobre. — **1.** On considère, dans un plan, une droite OA de longueur a, faisant avec Ox un angle α, et une autre droite AB de longueur, b perpendiculaire sur OA.

On demande d'exprimer au moyen des quantités a, b, α la somme S des aires engendrées par OA, AB tournant autour de Ox.

Quel est le maximum de S, quand α varie?

2. Comment mesure-t-on la latitude d'un lieu à la surface de la Terre?

23 octobre. — **1.** Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme, le dernier, et le nombre des termes.

2. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône connaissant : le volume $\frac{2}{3}\pi a^2 b$; la surface totale. $2\pi a^2$; et sachant que l'apothème égale les sommes des rayons des bases.

(SESSION D'AVRIL)

20 avril. — **1.** Partager 13 en deux parties x, y telles que $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ soit maximum.

2. Connaissant la mesure du volume du tronc de pyramide à base triangulaire, établir celle du volume du tronc de pyramide à base polygonale.

22 avril. — **1.** Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy ; un cercle de rayon R est tangent à Oy au point O. D'un point A pris sur Ox, on mène une tangente AB rencontrant Oy en B.

Déterminer la position de A de telle sorte que

$$AB.OB = m^2.$$

(On prendra pour inconnue $OA = x$.)

2. Mesure de la latitude d'un lieu.

24 avril. — **1.** Éclipses de lune.

2. Déterminer, sur une demi-circonférence AMB, de rayon R, un point M tel que, traçant AM et abaissant MP perpendiculaire sur AB, le volume engendré par le segment ACM tournant autour de AB soit égal à k fois le volume engendré par le triangle AMP.

27 avril. — **1.** La bissectrice AD de l'angle A d'un triangle ABC divise BC en deux segments BD, DC, proportionnels aux côtés AB, AC.

2. Partager une droite AB, de longueur $2a$, les deux segments MA, MB tels que

$$\overline{MA}^2 + \overline{3MB}^2,$$

soit minimum.

QUESTION 367

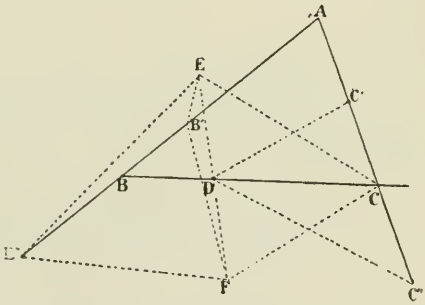
Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Sur le côté BC *d'un triangle* ABC, *on porte* BD = 1; *et, sur les côtés* BA, CA, *on porte cette même longueur* l *dans les directions* BA, CA *et dans les directions contraires,* BB′ = BB″ = 1, CC′ = CC″ = 1. *Si* E *et* F *sont les symétriques de* C, *relativement aux milieux de* DC′ *et* DC″, *et que* O, I, I_a, I_b, I_c *désignent les centres de la circonférence circonscrite, du cercle inscrit, et des cercles exinscrits à* ABC, *les droites* B′E, B″F, B′F, B″E *sont respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux droites* OI, OI_a, OI_b, OI_c. *Il y a égalité, lorsque* l *est égal au rayon de la circonférence circonscrite.* (Bernès.)

Les points E, D, F sont évidemment sur une droite parallèle à AC, et

DE = DF = BD.

On a donc la figure homothétique de celle qui a été considérée dans la Question 304; le centre d'homothétie étant B, et le rapport étant égal à $\frac{l}{BC}$.



Mais, dans la Question 304, on avait

$$B'C' = 2OI \sin A = \frac{OI.BC}{R},$$

R étant le rayon du cercle ABC; donc

$$B'E = \frac{OI.BC}{R} \cdot \frac{l}{BC} = OI\,\frac{l}{R}.$$

Lorsque l est égal à R, on a $B'E = OI$.

QUESTION 370

Solution par M. B. Sollebtinsky, à Gatschina.

L'équation

$$3x^2(a + b + c) + 4x(ab + bc + ca) + 4abc = 0$$

a ses racines réelles, quels que soient a, b, c. *Montrer qu'elles sont rationnelles quand on suppose :*

1° $b = c$, *2°* $bc = a(b + c + a)$ (*).

(*) Énoncé rectifié; voyez *Journal* 1890, p. 240.

(Lauvernay.)

Le discriminant de l'équation, changé de signe,

$$-D = 4\{(ab + bc + ca)^2 - 3abc(a + b + c)\}$$
$$= 2\{(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2\}$$

est toujours positif, et par suite les racines sont réelles, quels que soient a, b, c.

En supposant 1° $b = c$, on trouve

$$-D = 4(ab - b^2)^2 = [2b(a - b)]^2.$$

2° Si $bc = a(b + c - a)$,

d'où $a(b + c) - bc = a^2$,

on a

$$(ab - bc)^2 + bc - ca)^2 = a^2(b^2 + c^2) + 2b^2c^2 - 2abc(b + c)$$
$$= a^2(b^2 + c^2) - 2bc\{a(b + c) - bc\} = a^2(b - c)^2;$$

et, par suite, $-D = 4a^2(b - c^2 = [2a(b - c)]^2$.

QUESTION 373

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

M *étant un point quelconque pris dans le plan d'un triangle* ABC, *démontrer que les puissances de* A, B, C *relativement aux circonférences rciconscrites à* MBC, MCA, MAB *et la puissance, changée de signe, de* M, *relativement à la circonférence circon-*

scrite à ABC *sont inversement proportionnelles aux aires des triangles* MBC, MCA, MAB, ABC. *Montrer (en tenant compte des signes) que le somme des inverses de ces quatre puissances est nulle.*

(E. Bernès.)

Soient A′, A_1, M_1 les points où la droite AM rencontre BC et les circonférences ABC, MBC. Le point A′ appartenant à l'axe radical BC de ces circonférences, on a (en grandeur et en signe)

$$A'A.A'A_1 = A'M.A'M_1,$$

d'où
$$\frac{A'M}{A'A} = \left(\frac{A'A_1}{A'M_1}\right) = \frac{MA_1}{AM_1}.$$

Par suite, en désignant les puissances des points A, B, C, M par P_a, P_b, P_c, P

1°
$$\frac{P}{P_a} = \frac{MA_1.MA}{AM.AM_1} = -\frac{A'M}{A'A} = -\frac{MBC}{ABC},$$

d'où
$$\sum \frac{P}{P_a} = -1;$$

et enfin 2°
$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = 0.$$

Nota. Solution analogue par M. Baudran élève au lycée de Rouen.

QUESTION 377

Solution par M. Basile Sollertinski.

Dans tout triangle rectiligne :

1°
$$\frac{b^2c^2\sin^4 A - a^4(\cos A\cos B + \cos C\cos^2 B)^2}{c^2a^2\sin^4 B - b^4(\cos A\cos B + \cos C\cos^2 A)^2} = \text{const. } (*)$$

(Catalan.)

2°
$$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \frac{2a}{\sin A}.$$

1° En multipliant les deux termes de la fraction par $16R^4$, après avoir observé que

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C$$
$$\cos B + \cos A\cos C = \sin A\sin C$$

(*) Énoncé rectifié.

on trouve
$$\frac{a^4b^2c^2(1-\cos^2 B)}{a^2b^4c^2(1-\cos^2 A)}=1,$$

2° $$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=\frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$
$$=\frac{4R}{\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

De même $c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=\frac{4R}{\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}.$

Par suite
$$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)+c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=4R=\frac{2a}{\sin A}.$$

Remarque. — L'énoncé pouvait être encore rectifié, comme nous l'a fait observer M. Lemoine, dans la lettre à laquelle nous faisons allusion plus loin, en disant :

Dans tout triangle, la fonction
$$\frac{b^2c^2\sin^4 A-a^4(\cos^2 A+\cos A\cos B\cos C)^2}{a^4}$$
est constante ; c'est-à-dire, qu'elle conserve la même valeur quand on fait subir aux lettres la permutation circulaire.

A propos de cette question de M. Catalan et de la Question 378, que nous avons nous-même proposée, M. Lemoine appelle notre attention sur un Mémoire qu'il a publié dans l'Annuaire de l'Association française (Congrès de Limoges), Mémoire dans lequel il donne un grand nombre de relations sur les éléments du triangle. En voici quelques-unes, dont la démonstration donne lieu à des calculs intéressants.

En posant *(notations habituelles)*
$$\delta=r_a+r_b+r_c=4R+r,$$
on a
$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=p^2-rd,$$
$$\frac{b+c}{a}=\frac{r+r_a}{r_a-r};\qquad \frac{b-c}{a}=\frac{r_b-r_c}{d-r_a}.$$
$$a=\frac{r_a(d-r_a)}{p};\qquad a(p-a)=r(d-r_a)$$

$$\sum a(p-a) = 2rd \qquad \sum a^2(p-a) = 4S(R+r),$$

$$\sum a^2(p-a)^2 = 2r^2(\delta^2 - p^2);$$

$$\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2d}{p}; \qquad \sum \frac{a^2}{r_a^2} = \frac{2}{p^2}(d^2 - p^2).$$

$$\sum a^2 r_a = 4p^2(R-r); \qquad c(ar_b - br_a) = r(r_b^2 - r_a^2);$$

$$\sum r_a^3 = d^3 - 12Rp^2; \qquad \sum \frac{r_b r_a}{r_a^2} = \frac{1}{r^2}(p^2 - 12Rr);$$

$$\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R};$$

$$\sum a^3 \cos A = \frac{4S}{R}(p^2 - 3R^2 - rd);$$

$$r_b^2 + r_c^2 - r_b^2 - r^2 = 8R^2(\cos A - \cos B \cos C).$$

QUESTIONS PROPOSÉES

399. — Soit AC une corde mobile dans une circonférence Δ, de rayon R. Sur AB, on prend un point I tel que :

$$\overline{IA}^2 + IB^2 + \overline{kAB}^2 = 2(1 + 2k)R^2;$$

k désignant une constante donnée.

Trouver le lieu décrit par ce point I.

(*Ch. Michel*, élève au collège Chaptal.)

400. — Résoudre les équations :

1°

$$(a-b)^2(2x-a-b)^2+(b-x)^2(2a-b-x)^2+(a-x)^2(2b-a-x)^2=2K^2.$$

2° $(a-b)^2(2x-a-b)^2+(b-x)^2(2a-b-x)^2+(a-x)^2(2b-a-x)^2$
$=(a'-b')^2(2x-a'-b')^2+(b'-x)^2(2a'-b'-x)^2+(a'-x)^2(2b'-a'-x)^2.$

(*G. L.*)

401. — Démontrer que

$$\frac{1}{2}\sum a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$

est un carré parfait. (*G. L.*)

402. — Une circonférence ayant pour centre un foyer d'une conique, si l'on mène, à chaque normale de cette dernière courbe, une parallèle par le point où le rayon vecteur du pied

de la normale rencontre la circonférence, les droites ainsi obtenues seront concourantes. Démonstration géométrique.

(A. Tissot.)

403. — Si l'on projette un foyer d'une conique sur la tangente et sur la normale en un point de la courbe, et, ce dernier point sur l'axe focal :

Les deux premières projections seront en ligne droite avec le centre.

De la troisième, leur distance sera vue sous un angle droit.

Dans l'angle formé avec l'axe par la droite qu'elles déterminent, la normale et la droite joignant la deuxième projetion à la troisième seront anti-parallèles.

Les distances du centre à ces deux dernières projections seront entre elles dans un rapport égal à l'excentricité, d'où résulte, sans calcul, le rapport connu de la différence ou de la somme des rayons vecteurs d'un point d'une conique avec la distance de ce point au second axe. *(A. Tissot.)*

404. — Deux circonférences étant données ainsi qu'une droite qui ne les rencontre pas, on peut mener, d'un point quelconque de la droite, une tangente à chaque circonférence. Trouver le point pour lequel la somme des deux tangentes ainsi obtenues est aussi petite que possible, et celui pour lequel leur différence est aussi grande que possible.

(A. Tissot.)

ERRATA ET RECTIFICATIONS

P. 131, l. 6 ; le dernier terme du dénominateur est

$$c^2\alpha(\alpha+\gamma) \quad \text{et non} \quad c^2\alpha(\alpha+\beta)$$

Page 138 :

l. 1. *Au lieu de* sur D_1 *lisez* sur d_1

l. 15 (en remontant). *Au lieu de* $\widehat{DAD_1}$ *lisez* $\widehat{DPD_1}$

l. 2 (en remontant). *Au lieu de* la droite D, *lisez* la droite *d*.

P. 139, ll. 2-1. (en remontant. *Au lieu de* Dans... Ainsi, *lisez* l'angle $\widehat{KOK_3} = 2B$, et les triangles isoscèles KDK_3, KBK_1 ont le point double K d'où ...

P. 140, l. 8. *Au lieu de* $(K'N' + M'N')$, *lisez* $(K'N' - M'N')$.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13576-6-91.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE BACHET

« *Un entier quelconque est la somme de quatre carrés au plus.* »

Par **A. Matrot** (*).

Observation préliminaire. — Dans tout ce qui suit, les lettres représentent exclusivement des nombres *entiers*, *positifs* ou *négatifs*. Certains de ces nombres peuvent être nuls : il doit être entendu que, quand nous parlons d'une somme de quatre carrés, un ou deux de ces carrés peuvent être remplacés par des zéros.

Lemme I. — *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs égaux chacun à une somme de quatre carrés, est lui-même une somme de quatre carrés.*

Il suffit évidemment de le démontrer pour deux facteurs :

$$f = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad \varphi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Posons :

$$(1) \quad \begin{cases} A = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta \\ B = a\beta - b\alpha - c\delta + d\gamma \\ C = a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta \\ D = a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha \end{cases}$$

On a *(identité d'Euler)* :

$$(2) \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

En effet, si l'on développe le second membre, les doubles produits disparaissent tous, et il ne reste que les seize carrés, qui sont précisément les seize produits partiels fournis par le premier membre (**).

Lemme II. — *Tout nombre premier impair* p *qui divise une somme de quatre carrés premiers dans leur ensemble :* $S = F^2 + G^2 + L^2 + M^2$, *est lui-même une somme de quatre carrés.*

(*) Cette démonstration ne diffère pas, quant au fond, de celle que nous avons publiée en brochure (Paris, Nony, 1891); mais la présente rédaction a été rendue beaucoup plus concise, grâce à l'emploi des nombres négatifs *(Voir Journal 1891, p. 113)*.

(**) Chacun des huit nombres a, b, c, d, α, β, γ, δ, pouvant à volonté être pris *positivement* ou *négativement*, la décomposition du produit $f\varphi$ en quatre carrés peut, en général, se faire de plusieurs manières différentes

Soient f, g, l, m, les *restes minima* (*), *positifs* ou *négatifs*, de F, G, L, M, par rapport à $\mathfrak{M}(p)$; on a : $F = p + f$, $G = \mathfrak{M}(p) + g$, etc.; $F^2 = \mathfrak{M}(p) + f^2$, $G^2 = \mathfrak{M}(p) + g^2$, etc.;

$$S = F^2 + G^2 + L^2 + M^2 = \mathfrak{M}(p) + f^2 + g^2 + l^2 + m^2.$$

S étant divisible par p, $f^2 + g^2 + l^2 + m^2$ l'est nécessairement aussi, et l'on peut écrire, n étant entier :

$$(3) \qquad pn = f^2 + g^2 + l^2 + m^2.$$

f, g, l, m ne peuvent pas être nuls tous les quatre, car alors F, G, L, M admettraient p comme facteur commun et F^2, G^2, L^2, M^2 ne seraient pas premiers dans leur ensemble, contrairement à l'hypothèse : donc n n'est pas nul (**).

D'un autre côté, f, g, l, m sont tous quatre $< \frac{p}{2}$, en valeur absolue (aucun d'eux ne peut être égal à $\frac{p}{2}$, puisque p est impair). On a donc :

$$f^2 + g^2 + l^2 + m^2 < 4\frac{p^2}{4}, \quad pn < p^2, \quad n < p.$$

Si n était égal à 1, on aurait $p = f^2 + g^2 + l^2 + m^2$, et le lemme serait démontré.

Soit $n > 1$. Je dis qu'on peut toujours supposer n impair. En effet, si n est pair ($n = 2n'$), on aura :

$$(4) \qquad 2pn' = f^2 + g^2 + l^2 + m^2.$$

La somme $f^2 + g^2 + l^2 + m^2$ étant paire, a nécessairement ses quatre termes de même parité, ou deux termes pairs et

---

(*) a, b, q et r étant le dividende, le diviseur, le quotient et le reste d'une division, on a :

$$a = bq + r = \mathfrak{M}(b) + r,$$
$$a = b(q + 1) - (b - r),$$

ou, en posant $b - r = r'$,

$$a = b(q + 1) - r' = \mathfrak{M}b - r'.$$

On appelle *reste minimum* de a, relativement à b, le plus petit, en valeur absolue, des deux nombres $+ r$, et $- r'$. Ce reste minimum est au plus égal à $\frac{b}{2}$, si b est pair, et il est nécessairement $< \frac{b}{2}$, si b est impair.

(**) Deux au moins des quatre nombres f, g, l, m, sont différents de zéro. En effet, si l'on avait, par exemple, $f = g = l = 0$, la somme partielle $F^2 + G^2 + L^2 = S - M^2$ serait divisible par p; il en serait forcément de même de M^2, et l'on aurait $m = 0$, de sorte que f, g, l, m, seraient nuls, tous les quatre, ce qui est impossible.

deux impairs. On peut donc toujours partager f, g, l, m, en deux couples, par exemple f et g, l et m, formés chacun de deux entiers de même parité. L'égalité (4) peut s'écrire :

$$(5)\quad pn' = \left(\frac{f+g}{2}\right)^2 + \left(\frac{f-g}{2}\right)^2 + \left(\frac{l+m}{2}\right)^2 + \left(\frac{l-m}{2}\right)^2.$$

f et g étant de même parité, ainsi que l et m, les quatre termes du second membre sont entiers ; l'égalité (5) est donc de la forme :

$$(6)\qquad pn' = f'^2 + g'^2 + l'^2 + m'^2.$$

Si n' est encore pair, on opérera sur l'égalité (6) comme on l'a fait sur l'égalité (3), et l'on finira toujours par obtenir une égalité de la forme :

$$(7)\qquad pn_0 = f_0^2 + g_0^2 + l_0^2 + m_0^2,$$

dans laquelle n_0 sera impair. D'ailleurs n_0 sera plus petit que n et, *a fortiori*, inférieur à p.

Si $n_0 = 1$, le lemme est démontré. Si n_0 surpasse 1, divisons f_0, g_0, l_0, m_0, par n_0 ; soient a, b, c, d, les restes minimums, positifs ou négatifs, et α, β, γ, δ, les quotients correspondants (par défaut ou par excès) :

$$f_0 = n_0\alpha + a,\quad g_0 = n_0\beta + b,\quad l_0 = n_0\gamma + c,\quad m_0 = n_0\delta + d.$$

Portons ces valeurs dans l'égalité (7) ; il vient :

$$(8)\quad pn_0 = n_0^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) + 2n_0(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta) + a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Tous les termes contenant n_0 en facteur, excepté les quatre derniers du second membre, la somme de ceux-ci est nécessairement divisible par n_0, et l'on peut poser, n_1 étant entier :

$$n_0n_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

a, b, c, d ne peuvent pas être nuls tous les quatre ; car, s'il en était ainsi, l'égalité (8) se réduirait à

$$pn_0 = n_0^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$

ou, en divisant par n_0, à

$$p = n_0(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2).$$

Cette égalité est impossible, car p étant premier ne saurait être le produit de deux entiers > 1. Ainsi, n_1 n'est pas nul.

D'ailleurs a, b, c, d sont tous quatre $< \frac{n_0}{2}$, puisque n_0 est impair.

On a donc :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4\frac{n_0^2}{4},\quad n_0n_1 < n_0^2,\quad n_1 < n_0 ;$$

et, *a fortiori*, $n_1 < n$.

Remplaçons, dans l'égalité (8), $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ par $n_0 n_1$ et multiplions tout par $\frac{n_1}{n_0}$; il vient :

$$pn_1 = n_0 n_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 2n_1(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) + n_1^2$$

ou, en remplaçant $n_0 n_1$ par $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$:

$$pn_1 = (a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) + 2n_1(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)+n_1^2$$

Appliquons l'identité d'Euler et les formules (1) ; nous avons :

$$pn_1 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2n_1 A + n_1^2 = (A + n_1)^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

Ce résultat est de la forme :

$$(9) \qquad pn_1 = f_1^2 + g_1^2 + l_1^2 + m_1^2,$$

c'est-à-dire de même forme que l'égalité (3), mais n_1 est $< n$. Si $n_1 = 1$, le lemme est démontré. Si $n_1 > 1$, on opérera sur l'égalité (9) comme on l'a fait sur l'égalité (3), et l'on en déduira une nouvelle égalité de même forme :

$$pn_2 = f_2^2 + g_2^2 + l_2^2 + m_2^2,$$

dans laquelle n_2 sera $< n_1$. Si n_2 est encore > 1, on continuera de même; mais comme la suite $n, n_1, n_2, \ldots$ est décroissante, elle se terminera nécessairement par l'unité, et l'on aura finalement :

$$p = f_z^2 + g_z^2 + l_z^2 + m_z^2.$$

Lemme III. — *Le nombre des résidus quadratiques d'un nombre premier impair* p *est égal à* $\frac{p-1}{2}$.

On appelle *résidu quadratique* ou simplement *résidu* d'un entier donné N, tout reste de division, autre que o, d'un carré entier par N.

Soit p un nombre premier impair ; posons $p = 2h + 1$, d'où $h = \frac{p-1}{2}$. Divisons, par p, les carrés des entiers consécutifs $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ et cherchons le nombre des restes distincts. Si $a - b = \mathfrak{M}(p)$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ est aussi multiple de p; par suite a^2 et b^2 donnent le même reste : il suffit donc de prendre comme dividendes les carrés des entiers $< p$. Soient c et d deux entiers *complémentaires à* p $(c + d = p)$: $c^2 - d^2 = (c + d)(c - d) = \mathfrak{M}(p)$; donc c^2 et d^2 donnent le même reste. Par conséquent, il suffit de prendre comme dividendes les carrés des h entiers $< \frac{p}{2}$: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, h^2$. D'ailleurs les h

restes sont tous distincts, car, e et f étant deux des h premiers entiers $\left(e < f < \frac{p}{2}\right)$, $f^2 - e^2 = (f+e)(f-e)$ ne saurait être divisible par p, puisque $f+e$ et $f-e$ sont tous deux $< p$ et par suite premiers avec p. Il y a donc bien $h = \frac{p-1}{2}$ restes ou résidus quadratiques distincts et pas davantage.

Remarques. — Puisqu'il y a seulement $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques de p, il y a $\frac{p-1}{2}$ entiers inférieurs à p qui ne peuvent jamais être obtenus comme restes en divisant des carrés par p. Ces $\frac{p-1}{2}$ entiers sont appelés *non résidus quadratiques* ou simplement *non résidus* de p.

Dire qu'un entier $\alpha < p$ est résidu de p équivaut à dire qu'on peut trouver une valeur entière de X (ou plutôt une infinité de valeurs entières de X) satisfaisant à l'équation :

$$X^2 = \mathfrak{M}p + \alpha.$$

Lemme IV. — *Tout nombre premier impair* p *divise une somme de deux ou de trois carrés premiers entre eux.*

Posons, comme ci-dessus, $p = 2h + 1$. Prenons les $p - 1 = 2h$ entiers $< p$; mettons à part h et $2h$, et rangeons les $p - 3$ autres de la manière suivante :

1	2	3	. . . .	$h-2$	$h-1$
$2h-1$	$2h-2$	$2h-3$	. . . .	$h+2$	$h+1$

En réunissant les termes superposés, on forme $h - 1$ couples dont les deux termes ont uniformément pour somme $2h = p - 1$. On sait d'ailleurs que, parmi les $2h$ entiers $1, 2, 3, \ldots, 2h$, il y en a la moitié, c'est-à-dire h, qui sont résidus de p.

Cela posé, il peut se faire que h ou $2h$ soit résidu de p.

Si h est résidu, on peut écrire :

$$A^2 = \mathfrak{M}(p) + h, \quad 2A^2 = \mathfrak{M}(p) + 2h = p + \mathfrak{M}(p) - 1 = \mathfrak{M}(p) - 1,$$
$$2A^2 + 1 = \mathfrak{M}(p);$$

p divise donc une somme de la forme $2A^2 + 1$ ou $A^2 + A^2 + 1$.

Si $2h$ est résidu, on peut poser :

$$A^2 = \mathfrak{M}(p) + 2h = \mathfrak{M}(p) + p - 1 = \mathfrak{M}(p) - 1,$$
$$A^2 + 1 = \mathfrak{M}(p),$$

et par conséquent p divise une somme de la forme $A^2 + 1$.

Si h et $2h$ sont tous deux non-résidus, les h résidus sont contenus dans les $h - 1$ couples : il faut donc qu'un, au moins, de ces couples soit formé de deux résidus α, α'; on peut poser :

$$A^2 = \mathfrak{M}(p) + \alpha, \qquad A'^2 = \mathfrak{M}(p) + \alpha',$$
$$A^2 + A'^2 = \mathfrak{M}(p) + \alpha + \alpha'.$$

Mais $\alpha + \alpha' = p - 1$; donc :

$$A^2 + A'^2 = \mathfrak{M}(p) + p - 1 = \mathfrak{M}(p) - 1,$$
$$A^2 + A'^2 + 1 = \mathfrak{M}(p).$$

En résumé, p divise au moins une somme de l'une des trois formes :

$$A^2 + 1, \qquad A^2 + A^2 + 1, \qquad A^2 + A'^2 + 1,$$

c'est-à-dire une somme de deux ou de trois carrés premiers entre eux.

Théorème de Bachet. — *Tout nombre entier est la somme de quatre carrés au plus.*

1° 2 est la somme de deux carrés ($2 = 1^2 + 1^2$).

2° En vertu du Lemme IV, tout nombre premier, autre que 2, divise une somme qui est un cas particulier d'une somme de quatre carrés premiers dans leur ensemble; donc, en vertu du Lemme II, tout nombre premier impair est la somme de quatre carrés (au plus).

3° Soit E un nombre composé quelconque. Tous ses facteurs premiers sont des sommes de quatre (ou de moins de quatre) carrés. Donc, en vertu du lemme I, E est lui-même la somme de quatre carrés (au plus).

Remarque. — Si, dans les Lemmes I et II, on suppose

$$c = d = \gamma = \delta = 0, \qquad L = M = 0,$$

on voit que :

1° Le produit d'un nombre quelconque de sommes de deux carrés, est lui-même une somme de deux carrés;

2° Tout diviseur premier d'une somme de deux carrés premiers entre eux est également une somme de deux carrés.

D'un autre côté, on déduit facilement du théorème de Wilson que *tout nombre premier, de la forme* $4k + 1$, *divise une somme de deux carrés premiers entre eux* ($A^2 + 1$), *et, par suite, est une somme de deux carrés.* Au contraire, un nombre premier de la forme $4k + 3$ ne saurait être la somme de deux carrés; car deux carrés de même parité donnent une somme paire, et deux carrés de parités différentes ne peuvent donner qu'une somme de la forme $4k + 1$:

$$(2n)^2 + (2n' + 1)^2 = 4(n^2 + n'^2 + n') + 1.$$

De là résulte que *les entiers qui ne renferment aucun facteur premier de la forme* $k + 3$, *sont tous et seuls décomposables en deux carrés.*

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE (*)

Par M. **Bernès**,

(*Suite*, voir page 121.)

SUITE DES APPLICATIONS

IX. — Les deux énoncés qui suivent se rapportent à un autre mode de construction des points symétriquement inverses. Ils présentent, sous deux formes différentes, une seule et même proposition.

Théorème 1. — *Si* M *est un point variable d'une courbe* G *et que* E, F *désignent les intersections de* BM, CM *avec la circonférence* ABC; *le lieu de la rencontre* m *de la circonférence qui passe par* A *et* C *et qui est tangente à* CE, *avec celle qui passe par* A *et* B *tangentiellement à* BF *est la courbe* g, *symétriquement inverse de* G.

Théorème 2. — *Si* m *est un point variable d'une courbe* g *et que l'on désigne par* E, F *les points où les tangentes en* C, B *aux circonférences* ACm, ABm *rencontrent la circonférence* ABC, *le lieu de la rencontre* M *des droites* BE, CF *est la courbe* G *symétriquement inverse de* g.

Raisonnons sur le théorème 1. La droite BM a pour transformée une circonférence passant par A et C et dont la tangente en C fait, avec AC, un angle égal (en grandeur et signe) à celui de BM avec AB. Cette tangente se confond avec CE, car (CE, CA) = (BE, BA); et ainsi la droite BM a pour transformée la première circonférence de l'énoncé. La seconde est, de même, la transformée de CM.

Remarque 1. — Ces circonférences pourraient se définir différemment. Si l'antiparallèle à AE, menée par A, relative-

(*) La méthode d'inversion symétrique, que nous croyions nouvelle, a été déjà appliquée par M. Gob, sous le nom d'*involution*, dans un mémoire présenté en 1890 au congrès de Limoges *Sur divers modes de transformation* et l'a conduit à des résultats remarquables. Nous reconnaissons volontiers cette priorité, et nous aurons soin de signaler au fur et à mesure les points, assez rares du reste, où nous nous sommes rencontré avec lui. Quant au théorème qui sert de principe à la méthode, la priorité paraît appartenir à M. Neuberg.

ment à l'angle A rencontre BC en e, la première circonférence coïncide avec ACe. Même conclusion pour l'autre.

Remarque 2. — Si l'on appelle N la rencontre des tangentes CE, BF aux circonférences ACm, ABm, il y a entre M et N cette relation remarquable :

Les isogonaux P, Q *de* M *et* N *sont symétriques relativement au milieu de* BC.

On a, en effet,

$$(BP, BC) = (AB, BM) = (CA, CN) = (CQ, BC).$$

D'où $$(BP, CQ) = 0$$

BP, CQ sont donc parallèles; et, de même, CP, BQ. Donc P et Q sont symétriques relativement au milieu de BC.

Cette proposition, présentée sous une autre forme, et complétée par la méthode d'inversion, conduit à un autre théorème, facile à démontrer et que nous énoncerons simplement :

Théorème 3. — *Si* P, Q *sont deux points symétriques relativement au milieu* D *de* BC; M, N *leurs isogonaux;* m, n *leurs isocycliques ou les transformés de* M, N; p, q *leurs transformés, ou les isocycliques de* M, N, *ou les isogonaux de* m, n. *1°* BM, CN *se coupent sur la circonférence* ABC *(de même,* CM, BM*); les circonférences* ACm, ABn *se coupent sur* BC *(de même, les circonférences* ABm, ACn*); 2°* CN, BN *sont tangentes aux circonférences* ACm, ABm *(de même,* CM, BM *le sont aux circonférences* ACn, ABn*); 3°* p *et* q *sont deux sommets opposés d'un quadrilatère harmonique dont les deux autres sommets sont* A *et le point* d *où la symédiane issue de* A *rencontre la circonférence* ABC. *Les circonférences* ACp, ABq *sont tangentes, et aussi les circonférences* ABp, ACq.

Ajoutons, comme application d'un résultat général déjà connu, que MP et mp sont parallèles, ainsi que NQ et nq.

On a, de plus, entre les distances de p, q aux points A, B, C, d, les relations

$$\frac{Bp.Bq}{Cp.Cq} = \frac{c^2}{b^2}\ \frac{Bp.Cp}{Bq.Cq} = \frac{Ap^2}{Aq^2} = \frac{dp^2}{dq^2}.$$

Comme relations angulaires immédiates, on a, en désignant par α, β, γ les angles du triangle PBC :

angles de PBC α β γ

Angles de QBC	$-\alpha$	$-\gamma$	$-\beta$
— de MBC	$A-\alpha$	$B-\beta$	$C-\gamma$
— de NBC	$A+\alpha$	$B+\gamma$	$C+\beta$
coordonnées angulaires de *m*	α	β	γ
— — de *n*	$-\alpha$	$-\gamma$	$-\beta$
— — de *p*	$A-\alpha$	$B-\beta$	$C-\gamma$
— — de *q*	$A+\alpha$	$B+\gamma$	$C+\beta$

Lorsque les deux points P, Q sont sur la perpendiculaire à BC en son milieu, $\beta=\gamma$, *alors* M *et* N *sont isogonaux l'un de l'autre relativement au triangle* LBC *dans lequel* L *est le transformé de l'orthocentre* H; m, n *sont isoptiques*, p, q *sont conjugués*.

Si les huit points P, Q, M, N, *m*, *n*, *p*, *q* étant mobiles, on donne le lieu décrit par l'un, on connaît, par cela même, les lieux décrits par les autres. Si l'un décrit une circonférence qui passe par BC, les sept autres décrivent aussi des circonférences, ce qui est évident *a priori*. Si P parcourt une droite, il en est de même de Q, *p* et *q* décriront des cercles, M, N des coniques circonscrites à ABC et dont le quatrième point d'intersection sera aussi sur la circonférence ABC, *m*, *n* décriront les transformées de ces coniques.

Comme exemple particulier, sur lequel on peut vérifier le théorème, on peut prendre pour P et Q A et son symétrique A_1 relativement au milieu de BC; ou bien l'orthocentre H et le point *s*, diamétralement opposé à A sur la circonférence ABC; ou bien φ, projection de H sur la médiane et Δ, point où la médiane rencontre la circonférence ABC, etc.

APPLICATION AUX PROPRIÉTÉS DE DEUX POINTS CONJUGUÉS

X. — Nous supposerons ces deux points *conjugués* M, N définis simplement par la propriété d'être *complémentaires* relativement au centre O, c'est-à-dire d'avoir 2A, 2B, 2C pour sommes de leurs coordonnées angulaires. Et la méthode va s'appliquer à en déduire les autres propriétés.

1° **Théorème préliminaire.** (*) — *Les transformés* m, n *de*

(*) Ce théorème se trouve dans le Mémoire de M. Gob, qui en donne cette démonstration fort simple : *Toute circonférence qui passe par* m *et* n *étant orthogonale à* BC, *toute circonférence qui passe par* m *et* n *est orthogonale à la circonférence* ABC.

deux points conjugués M, N, *sont symétriques relativement à* BC; *et réciproquement.*

En effet, d'après VI 3°, si d'une manière générale les coordonnées angulaires de deux points M, N ont pour sommes λ, μ, ν, les sommes des angles correspondants dans les deux triangles mBC, nBC seront $2A - \lambda$, $2B - \mu$, $2C - \nu$. Et comme ici λ, μ, ν sont égaux à 2A, 2B, 2C, les angles de mBC, nBC ont des sommes nulles. Donc m et n sont symétriques relativement à BC.

Si M, N avaient séparément pour coordonnées angulaires A, B, C, m, n seraient sur BC; ce cas est à écarter, car alors M, N ne sont pas conjugués.

Une généralisation de ce théorème sera donnée plus loin.

2° **Théorème.** — *Les conjugués* M, N *sont en ligne droite avec* O.

En effet, si A′ est le symétrique de A, relativement à BC, les quatre points A, A′, m, n, qui déterminent un trapèze isoscèle, sont sur une même circonférence. Cette circonférence passant par A, sa transformée est une droite qui contient les transformées O, M, N de A′, m, n. Ajoutons que, comme AA′ est extérieur à l'angle mAn, les points M, N sont d'un même côté de O.

3° **Théorème.** — *On a* $OM.ON = R^2$, *et les points* M, N *ont leurs coordonnées tripolaires proportionnelles.*

Les égalités $Am = A'n$, $An = A'm$ se transforment en

$$\frac{1}{AM} = \frac{ON}{AO.AN}, \quad \frac{1}{AN} = \frac{OM}{AO.AM};$$

d'où

$$\frac{AM}{AN} = \frac{R}{ON} = \frac{OM}{R}.$$

De là $OM.ON = R^2$. Et comme une transformation du même genre, où l'on prendrait B, puis C pour pôles donnerait, de même,

$$\frac{BM}{BN} = \frac{R}{ON}, \quad \frac{CM}{CN} = \frac{R}{ON};$$

on a

$$\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN} = \frac{CM}{CN},$$

ce qui peut aussi se conclure des égalités $Bm = Bn$, $Cm = Cn$.

4° **Théorème.** — M *et* N *étant conjugués, le point* P *où* AM *rencontre la circonférence* ABC *et les points* O *et* N *sont sur une même circonférence avec* A.

C'est la transformation de cette propriété évidente que Am et A'n se rencontrent sur BC en un point p.

De $\frac{pm}{pn} = \frac{pA}{dA'}$, on pourrait tirer $\frac{PM}{PN} = \frac{AM}{AN}$; propriété évidente.

Et de ce que mn est perpendiculaire, en q, sur BC et divisé par BC en deux parties égales il résulterait que *la circonférence* AMN *est orthogonale à la circonférence* ABC *et que si* Q *est la rencontre de ces deux circonférences,* A *et* Q *sont harmoniquement opposés relativement à* MN, *c'est-à-dire forment deux sommets opposés d'un quadrilatère harmonique* AMQN, *dont* M, N *sont les deux autres sommets.*

5° La propriété connue que les podaires de deux points conjugués sont équiangles se transforme dans la propriété suivante, relative aux deux points symétriques m, n.

Théorème. — m, n *étant deux points symétriques relativement à* BC; *si la perpendiculaire en* m, *à* Am, *rencontre* AC *en* E, AB *en* F, *et en* G *la tangente en* A *à la circonférence* ABC, *et que* D *soit la rencontre de la circonférence* ABC *et de la droite joignant* G *au point diamétralement opposé à* A *sur cette circonférence, les arcs de cercle* EF, FD, DE, *dans les circonférences* AEF, AFD ADE *déterminent un triangle curviligné* DEF, *équiangle avec le triangle construit de même en partant du point* n.

6° M, N *étant deux points conjugués, les perpendiculaires en* A *à* AM, AN *déterminent, sur la droite* OMN, *deux points* M', N' *qui sont aussi conjugués.*

Car soient m, n, m', n' les quatre transformés. Ils sont sur une même circonférence avec A et A' puisque M, N, M', N' sont sur une même ligne droite passant en O. L'angle mAm' est droit comme l'angle MAM', et mm' est un diamètre de cette circonférence, de même nn'; par suite $mnm'n'$ est un rectangle, et BC perpendiculaire sur le milieu de mn est aussi perpendiculaire sur le milieu de $m'n'$. Donc M, N' sont conjugués.

Remarque. — Le centre de cette circonférence, étant à la rencontre de mm', nn', son transformé est l'extrémité A_1 de la corde commune aux circonférences AMM', ANN'. Il est symétrique de A, relativement à la droite OMN. C'est là un résultat général qu'on peut énoncer ainsi : *Le transformé du centre d'une circonférence qui passe par* A *est le symétrique* A_1 *du point* A, *relativement à la droite, transformée de cette circonférence.*

On peut l'expliquer comme dans ce qui précède. Ou encore, soient mm' un diamètre quelconque de cette circonférence, et M, M' les transformés de ses extrémités; le centre, qui est le milieu de mm', a pour transformé le point harmoniquement opposé à A, relativement à MM'; comme l'angle MAM' est droit et que, par suite, la symédiane issue de A, dans le triangle MAM', se confond avec la hauteur de ce triangle, le point harmoniquement opposé à A est le symétrique de A, relativement à la droite MM'.

Ce résultat se retrouvera plus loin comme cas particulier d'un théorème plus général.

Voici, pour terminer ce sujet, la généralisation du théorème préliminaire.

Théorème. — *Si les deux points* m, n *sont isogonaux relativement à un triangle* PBC *et que* A' *soit l'isogonal de* A *relativement à ce même triangle, les transformés* M, N *de* m, n *sont complémentaires relativement au transformé* ω *du point* A'.

Car soient α, β, γ les angles de PBC, les points m, n étant réciproques relativement à PBC, les triangles mBC, nBC ont pour somme d'angles α, β, γ et par suite (d'après VI, 3°) les sommes des coordonnées angulaires de leurs transformés M, N sont $2A - \alpha$, $2B - \beta$, $2C - \gamma$. Mais le point A' étant isogonal de A relativement à PBC, les angles de A'BC sont $\alpha - A$, $\beta - B$, $\gamma - C$ et par suite les coordonnées angulaires de ω, transformé de A', sont $2A - \alpha$, $2B - \beta$, $2C - \gamma$. Donc M, N sont complémentaires relativement à ω.

Le théorème préliminaire suppose le cas où P est sur BC.

Remarque 1. — Il importe d'observer que, dans ce théorème, on peut prendre pour m et n deux points quelconques du plan : P s'en déduit. C'est l'isogonal relativement au triangle mBC,

du symétrique n' de n par rapport à BC. Cette construction générale d'un triangle, relativement auquel deux points donnés soient isogonaux, est à noter.

Remarque 2. — Signalons deux autres cas particuliers. Si P est en A, ω est un point quelconque de la circonférence ABC : on rentre dans la propriété, déjà indiquée, que les transformés de deux points isogonaux sont isogonaux. Si P coïncide avec le transformé L de l'orthocentre H, A′ est en A et ω à l'infini; les deux points M, N sont *isoptiques*.

Autre forme du théorème. — *Si* m, n *sont isogonaux relativement à* PBC, *et que* Q *soit le conjugué de l'isocyclique de* P, *les points* M, N *transformés de* m, n *sont complémentaires relativement à* Q.

Ni la démonstration directe, ni l'identification du point Q ainsi défini avec le point ω du premier énoncé, ne présentent de difficulté.

L'identification de Q avec ω donne lieu à cet énoncé :

Le conjugué de l'isocyclique d'un point P, *et l'isogonal de* A *relativement au triangle* PBC, *sont deux points symétriquement inverses.*

(A suivre.)

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION

DE M. SCHOUTE

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 153.)

---

10. — Les formules (8) conduisent, immédiatement, à une décomposition de la transformation de M. Schoute, en trois transformations quadratiques. En effet, si l'on pose :

$$(12)\quad xx_2 = yy_2 = zz_2, \qquad \text{et} \qquad x'x'_2 = y'y'_2 = z'z'_2,$$

les formules (8) se décomposent en les suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} xx_2 & = & yy_2 & = & zz_2, \\ \dfrac{x_2}{K_2 \cos A - x'_2 S_2} & = & \dfrac{y_2}{K_2 \cos B - y'_2 S_2} & = & \dfrac{z_2}{K_2 \cos C - z'_2 S_2}, \\ x'x'_2 & = & y'y'_2 & = & z'z'_2. \end{array}\right.$$

Dans ces dernières formules, les relations extrêmes, c'est-à-dire les formules (12), représentent la transformation par points inverses, de M. le colonel Mathieu, tandis que les secondes représentent une transformation par rayons vecteurs réciproques. A la droite représentée par $lx + my + nz = 0$ elle fait correspondre le cercle $K\Sigma l \cos A - S\Sigma lx = 0$. En effet, les cercles.

$$K \cos A - xS = 0, \quad K \cos B - yS = 0, \quad K \cos C - zS = 0$$

satisfont à la condition (7), ils passent donc par un même point de coordonnées x, y, z :

$$\frac{x}{\cos A} = \frac{y}{\cos B} = \frac{z}{\cos C},$$

qui est le centre O du cercle circonscrit. Aux côtés BC, CA, AB correspondent les cercles BOC, COA, AOB. Le point O est donc le centre ; et le carré R^2 du rayon du cercle circonscrit est la puissance de cette transformation par rayons vecteurs réciproques.

La décomposition en trois transformations quadratiques, que nous venons d'indiquer, n'est pas la seule possible. En effet, les formules (8) peuvent encore résulter des trois relations :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{x}{4S''x'' \cos A - K''} & = & \dfrac{y}{4S''y'' \cos B - K''} & = & \dfrac{z}{4S''z'' \cos C - K''}, \\ x''x''_2 & = & y''y''_2 & = & z''z''_2, \\ \dfrac{x''_2}{4S'x' \cos A - K'} & = & \dfrac{y''_2}{4S'y' \cos B - K'} & = & \dfrac{z''_2}{4S'z' \cos C - K'}. \end{array}\right.$$

Des formules (14), la seconde représente encore une transformation par points inverses ; les deux autres, des transformations par rayons vecteurs réciproques. Il est facile de voir que, dans ce dernier cas, le centre de la transformation est l'orthocentre H ; quant à la puissance, elle est négative et égale, en valeur absolue, à la moyenne proportionnelle entre les deux segments que l'orthocentre détermine sur une hauteur du triangle : elle est, par suite, égale au carré ρ^2 du rayon du cercle conjugué.

Pour obtenir le point P′, jumeau d'un point donné P, on pourra donc employer l'une des deux méthodes suivantes :

1° Prendre le point P_2 inverse de P, puis le point π transformé par rayons vecteurs réciproques (centre O, puissance

$+ R^2$) de P_2 enfin le point ϖ_2 inverse de ϖ. Le point ϖ_2 est le point cherché P' ;

ou bien :

2° Prendre le point ϖ', transformé par rayons vecteurs réciproques, (centre H, puissance $-\rho^2$) de P, puis le point ϖ'_2 inverse de de ϖ', enfin le point π, transformé par rayons vecteurs réciproques (centre H, puissance $-\rho^2$) de ϖ'_2. π sera le point cherché P'.

Représentons par I et par R, respectivement, les transformations par points inverses et par rayons vecteurs réciproques. Indiquons en particulier par R_o et R_h les transformations à centre O et H dont il vient d'être question. Avec ces notations on peut dire que la tranformation de M. Schoute est la succession de trois transformations quadratiques IR_oI ou R_hIR_h. Donc la succession $IR_oIR_hIR_h$ de ces six transformations quadratiques ramène chaque point à sa place primitive.

Au moyen de la transformation R_hIR_h, M. Schoute a montré que si l'on prend le transformé ϖ' d'un point P, dans le système R_h, les points P et ϖ' sont deux points inverses, le triangle orthocentrique $H_aH_bH_c$ étant le triangle de référence.

La décomposition de la transformation de M. Schoute en trois transformations quadratiques permet de se rendre compte des résultats indiqués précédemment et d'en prévoir de nouveaux (*).

(A suivre.)

(*) Une autre combinaison de six transformations qui forment un cycle fermé a été indiqué par M. Capelli (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1887, tome I, p. 48). Les points Brocardiens en sont un autre exemple.

Dans le tome II des *Wiskundige Opgaven* se trouve la question suivante, proposée par M. Neuberg :

On donne un point O *dans le plan d'un triangle* ABC. *Les droites* OA, OB, OC *rencontrent les côtés opposés en* A′, B′, C′. *Par* A′, B′, C′ *et deux autres points* D, E *du plan on fait passer une conique qui coupe* BC, CA, AB *pour la seconde fois en* A″, B″, C″. *Prouver que* AA″, BB″, CC″ *passent par un même point* O′ *qui forme avec* O *une transformation birationnelle involutive. Décomposer cette transformation en transformations quadratiques.* Ce problème a été résolu : analytiquement, par M. Neuberg; géométriquement, par M. Schoute. La transformation est du huitième ordre; elle est décomposable en trois transformations quadratiques.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(Suite.)

169. — *Soient* O, I, I′, I″, I‴, A′, B′, C′, *les centres du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, et les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC; *les droites :* I′A′, I″B′, I‴C′, OI, *concourent au même point.*

Les équations des trois premières droites sont :

$$x(\cos C - \cos B) - y\cos B + z\cos C = 0,$$
$$x\cos A + y(\cos A - \cos C) - z\cos C = 0,$$
$$-x\cos A + y\cos B + z(\cos B - \cos A) = 0;$$

elles se coupent au point

$$\frac{x}{\cos B + \cos C - \cos A} = \frac{y}{\cos A + \cos C - \cos B} = \frac{z}{\cos A + \cos B - \cos C}$$

qui est situé sur OI.

170. — *Soient* M, *un point,* A_1, B_1, C_1 *ses projections orthogonales sur les côtés du triangle de référence. On a quel que soit* M

$$(AB_1 \cos A - AC_1)(BC_1 \cos B - BA_1)(CA_1 \cos C - CB_1)$$
$$= (AC_1 \cos A - AB_1)(BA_1 \cos B - BC_1)(CB_1 \cos C - CA_1).$$

171. — *Le lieu géométrique des points tels que*

$$\overline{MAB}^2 + \overline{MBC}^2 + \overline{MCA}^2 = \frac{5}{9} S^2,$$

*(*S, *aire de* ABC*) est une ellipse de centre* G.

Son équation est :

$$2\sum a^2x^2 - 5\sum abxy = 0.$$

172. — *Une droite harmoniquement associée au point dont les coordonnées barycentriques sont* α_1, β_1, γ_1, *coupe les côtés du triangle de référence en* A′, B′, C′; *les circonférences* ABC, A′B′C, A′C′B, B′C′A, *se coupent en un même point* M.

Ce théorème de géométrie est bien connu.

Les coordonnées normales de M, sont

$$\frac{x}{a}(\gamma_1 - \beta_1) = \frac{y}{b}(\alpha_1 - \gamma_1) = \frac{z}{c}(\beta_1 - \alpha_1).$$

Application : Si A'B'C' est la droite de Longchamps, M est le point de Steiner.

Si A'B'C' est la transversale inverse du diamètre de Brocard KO, M est le point de Tarry.

173. — *Sommer la suite :*

$$S = 1.2 - 2.3 + 3.4 - 4.5 + \ldots\ldots \pm n(n-1).$$

On trouve aisément que :

Si l'on s'arrête à un terme de rang n pair :

$$S = -\frac{n(n+2)}{2};$$

et si l'on s'arrête à un terme de rang n impair :

$$S = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

174. — *Si un nombre est terminé par* 5, *sa quatrième puissance est terminée par* 0625.

175. — *Résoudre l'équation :*

$$3(x+b-a)(x+a-b)(x-a-b)$$
$$+4(ax^2+bx^2+a^2x+b^2x+a^2b+ab^2)=0.$$

Le premier membre peut s'écrire, identiquement :

$$(x+a+b)[3x^2-2x(a+b)+3a^2+3b^2-2ab]=0.$$

176. — *Vérifier les égalités*

$$1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2.4}+\frac{5}{2.4.6}+\ldots+\frac{2n-1}{2.4.6\ldots 2n}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{2}{1.3.5}+\frac{3}{1.3.5.7}+\ldots+\frac{n}{1.3.5\ldots(2n+1)}+\ldots$$

Elles résultent de l'identité

$$1=\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-1}{a_1a_2}+\frac{a_3-1}{a_1.a_2.a_3}+\ldots.$$

où a_1, a_2, a_3.... représentent successivement :

1° la suite des nombres pairs,

2° la suite des nombres impairs.

177. — *Si l'on pose :* $P=(A-B)(B-C)(C-A)$, *vérifier que :*

$$\Sigma A^2(C-B)=P,$$
$$\Sigma A^3(C-B)=P\Sigma A,$$
$$\Sigma A^4(C-B)=P(\Sigma A^2+\Sigma AB),$$
$$\Sigma A^5(C-B)=P(\Sigma A^3+\Sigma A^2B+ABC),$$
$$\Sigma A^6(C-B)=P(\Sigma A^4+\Sigma A^3B+\Sigma A^2B^2+ABC\Sigma A),$$
$$\Sigma A^7(C-B)=P(\Sigma A^5+\Sigma A^4B+\Sigma A^3B^2+ABC\Sigma A^2+ABC\Sigma AB),$$

$$\Sigma A^8(C-B) = P\left(\begin{array}{c}\Sigma A^6 + \Sigma A^5 B + \Sigma A^4 B^2 + \Sigma A^3 B^3 \\ + ABC\Sigma A^3 + ABC\Sigma A^2 B + A^2B^2C^2\end{array}\right),$$

. . . . . .

et, en général :

$$\Sigma A^n(C-B) = P\left[\begin{array}{c}A^{n-2} + A^{n-3}.\dfrac{C^2-B^2}{C-B} \\ + A^{n-4}.\dfrac{C^3-B^3}{C-B} + \ldots + \dfrac{C^{n-1}-B^{n-1}}{C-B}\end{array}\right],$$

ou

$$\Sigma A^n(C-B) = P\left[\begin{array}{c}\Sigma A^{n-2} + \Sigma A^{n-3}B + \Sigma A^{n-4}B^2 + \ldots \\ + ABC(\Sigma A^{n-5} + \Sigma A^{n-6}B + \ldots \\ + A^2B^2C^2(\Sigma A^{n-8} + \Sigma A^{n-9}B + \ldots \\ + \ldots\end{array}\right],$$

Dans chaque ligne de cette formule, on doit s'arrêter au moment où l'on serait amené à écrire un exposant de B supérieur à celui de A; de plus, si n est de la forme $2 + 3m$, le signe Σ, où A figurerait avec l'exposant o, doit être remplacé par l'unité.

(A suivre.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(Concours de 1891.)

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère S et deux droites D, D′, tangentes à cette sphère.

1° Par un point quelconque de la droite D on mène les droites G et G′ qui touchent la sphère S et rencontrent la droite D′; démontrer que les points de contact des droites G et G′ avec la sphère S décrivent deux cercles C et C′;

2° Démontrer que les droites G, qui touchent la sphère S en des points situés sur le cercle C, sont tangentes à une infinité de sphères Σ;

3° Trouver combien il y a de sphères Σ tangentes à un plan donné Q. Discuter le problème et chercher le lieu des traces des droites G sur le plan Q.

BACCALAUREAT ÈS SCIENCES

(SESSION DE JUILLET 1891, PARIS)

7 Juillet. — 1° Diviser une droite en moyenne et extrême raison.

2° Construire et calculer le rayon du décagone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R.

3° Un corps pesant est lancé d'une hauteur h au-dessus du sol avec une vitesse v_0 dirigée verticalement de bas en haut. Quelle vitesse aura-t-il en tombant sur le sol?

8 juillet. — 1° Un triangle isoscèle BAC dans lequel AC = AB = b tourne autour d'un axe Bx situé dans son plan, passant par le sommet B et ne traversant pas la surface du triangle. Calculer le volume engendré par ce triangle en fonction de l'angle α que fait l'hypoténuse BC avec l'axe Bx. Déterminer α de façon à rendre ce volume maximum.

2° Définition et propriété de la sous-normale à une parabole.

10 juillet. — 1° On donne dans un triangle ABC la base BC = a et la hauteur h du sommet A ; on mène la droite B'C' parallèle à BC à distance x de BC ; on joint B'C' à un point A' de BC. On demande de calculer le volume V engendré par le triangle A'B'C'. Maximum de V.

2° Une tige de hauteur b, dirigée suivant la verticale d'un lieu dont la latitude est φ, est exposée aux rayons du soleil. On demande de trouver les longueurs l et l' de l'ombre portée par la tige à midi vrai aux jours des solstices d'hiver et d'été. On suppose connue l'obliquité de l'écliptique ω.

16 juillet. — 1° Étant donnés deux points A, B, étudier la variation de l'angle AMB sous lequel on voit, d'un point M, le segment AB quand ce point M se déplace sur une droite DD' donnée et perpendiculaire à AB

On donne AC = a, BC = b ; on prendra MC = x comme variable.

2° Étant donné une droite par ses projections, construire l'angle qu'elle fait avec la ligne de terre.

20 juillet. — 1° Formule des annuités.

2° Étant donné un carré ABCD trouver sur le coté CD, ou sur son prolongement deux points E, F tels que le segment EF soit vu du point B sous un angle α.

Entre quelles limites peut varier α?

Rep. En posant CF$=x$, on a EC$=\frac{a^2}{x}$; a désignant la longueur du côté du carré donné.

D'ailleurs $$\alpha = \text{EBD} - \text{FBD};$$

d'où $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\text{EBD} - \operatorname{tg}\text{FBD}}{1 + \operatorname{tg}\text{EBD}\operatorname{tg}\text{FBD}}.$$

Mais $$\operatorname{tg}\text{EBD} = 1 + \frac{a}{x},$$

$$\operatorname{tg}\text{FBD} = 1 - \frac{x}{a}.$$

Finalement, en posant pour abréger l'écriture

$$\operatorname{tg}\alpha = \text{K}, \qquad \frac{x}{a} = \text{X},$$

on a $$K\left[2+\frac{1}{X}-X-1\right]=X+\frac{1}{X},$$
ou $$X^2(1+K)-KX+1-K=0.$$

La discussion porte seulement sur le discriminant de cette équation, parce que X peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

On trouve ainsi $$K^2-4(1-K^2)>0,$$
ou $$K^2>\frac{4}{5}.$$

La tangente trigonométrique de l'angle α doit donc être, en valeur absolue, supérieure à $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

23 juillet. — 1° Couper une sphère par un plan P de telle façon que le volume de l'un des segments à une base ainsi obtenue soit un volume du cylindre ayant même base et même hauteur que le segment dans un rapport donné m.

On prendra pour inconnue la hauteur du segment.

2° Jour solaire moyen. Sa définition.

QUESTION 369

Solution et généralisation par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

On donne un triangle rectangle isoscèle AOB, *dont les côtés de l'angle droit* OA, OB *sont égaux à* $a+\sqrt{a^2+h^2}$. *Du point* O, *comme centre, avec* h *pour rayon, on décrit un cercle qui coupe l'hypoténuse* AB *aux points* C, C'.

Démontrer que, si l'on projette l'un de ces points sur les côtés OA, OB, *la droite passant par ces projections coupe la bissectrice de* BOA *en un point* M *tel que* $OM=a\sqrt{2}$. *Cette propriété s'applique au triangle* A'OB' *obtenu en prenant sur les prolongements des segments* AO, BO *des points* A', B' *tels que*

$$OA'=OB'=\sqrt{a^2+h^2}-a.$$

Déduire, de cette remarque, une solution du problème de Pappus et la discussion qu'elle comporte. (G. L.)

En désignant par D, E les projections de C, sur OA, OB, on a, immédiatement,

$$OA=OD+OE.$$

Si F est la projection de M sur OA, on a

$$\frac{MF}{OE} = \frac{DF}{OD} = \frac{DF+MF}{OD+OE} = \frac{OD}{OA};$$

d'où

$$OD.OE = MF.OA.$$

D'après cela

$$\overline{OA}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + 2OD.OE = h^2 + 2MF.OA,$$

d'où

$$MF = \frac{\overline{OA}^2 - h^2}{2OA} = \frac{2a(a+\sqrt{a^2+h^2})}{2OA} = a;$$

et, par suite,

$$OM = a\sqrt{2}.$$

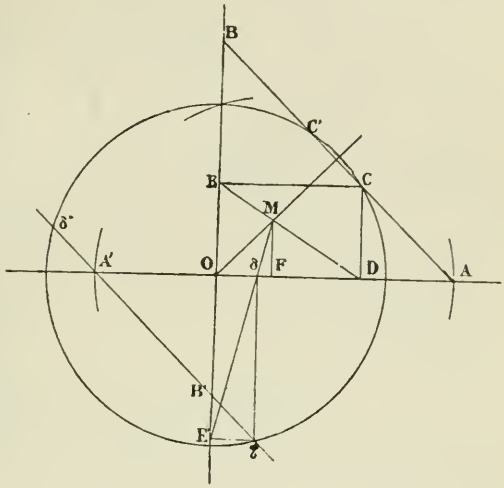


Fig. 1.

De même, $OB' = OE' - O\delta$, d'où $\overline{OB'}^2 = h^2 - 2OB'.MF$,

car
$$\frac{MF}{OE'} = \frac{\delta F}{O\delta} = \frac{MF - \delta F}{OE' - O\delta} = \frac{O\delta}{OB'},$$

et, par conséquent

$$MF = \frac{h^2 - \overline{OB'}^2}{2OB'} = \frac{2a(\sqrt{a^2+h^2} - a)}{2OB'} = a.$$

Inversement; étant donnés le point M et la longueur $ED = h$, on pourra construire OA, OB', et ensuite DE, δE'.

La circonférence décrite du centre O, avec h pour rayon, rencontrera toujours A'B' dans le deuxième et le quatrième quadrant; car on a $h > \sqrt{a^2 + h^2} - a$. Mais pour que cette circonférence rencontre AB, il faut et il suffit qu'on ait

$$h > \frac{OA}{\sqrt{2}}, \quad \text{d'où} \quad (h^2 - 2a^2) > 4a^2(a^2 + h^2)$$

et enfin
$$h > 2OM.$$

Généralisation. *Sur les côtés d'un angle donné* BOA *et sur le*

prolongement de l'un de ses côtés OB, *on porte* $OA = OB = OB_1 = a + \sqrt{a^2 + h^2}$, *la circonférence décrite du centre* O, *avec* h *pour rayon, rencontre* AB_1 *en des points* H, H′, *et les parallèles à* B_1B, *menées par* H, H′, *coupent* BA *en des points* C, C′.

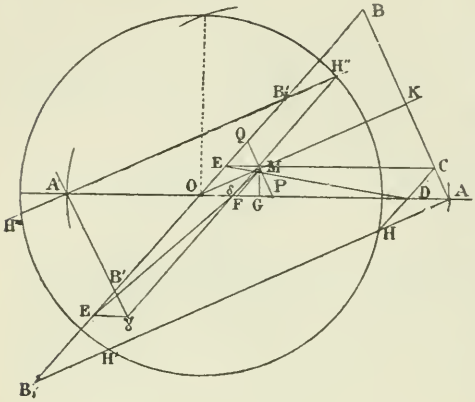


Fig. 2.

La droite DE *joignant les projections, sur les côtés de* AOB, *faites parallèlement à ces côtés, de l'un des points* C, C′ *est égale à* h *et coupe la bissectrice de* AOB *en un point* M *tel que* $OM = a \sec \frac{O}{2}$.

On pourra aussi appliquer cette construction à l'angle opposé par le sommet, en prenant $OA' = \sqrt{a^2 + h^2} - a$.

En effet, puisqu'on a HD = DC = OE, les droites OH, ED sont égales et parallèles. On trouve ensuite : OA = OD + OE, OD.OE = MF.OA ; d'où

$$OA^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE \cos O + 2OD.OE\,(1 + \cos O)$$
$$= h^2 + 2OA(MF + MF \cos O) = h^2 + 2OA.OG;$$

donc
$$OG = \frac{OA^2 - h^2}{2OA} = a,$$

et
$$OM = a \sec \frac{O}{2}, \text{etc.}$$

De là, une solution du problème de Pappus, pour un angle quelconque : *Étant donnés le point* M, *sur la bissectrice d'un angle* BOA, *et la longueur* h, *on porte sur les côtés des angles adjacents* $OA = OB_1 = a + \sqrt{a^2 + h^2}$, *et* $OA' = OB' = \sqrt{a^2 + h^2} - a$. *Si la circonférence décrite du centre* O, *avec le rayon* h, *coupe les droites* AB_1, $A'B'_1$ *en des points* H, H′, H″, H‴, *les parallèles aux rayons* OH, OH′, OH″, OH‴, *menées par* M, *sont les droites*

cherchées. La circonférence coupe toujours $A'B'_1$; mais pour qu'elle coupe aussi AB_1, il faut et il suffit qu'on ait $h \geqslant AK$; or, QMP étant parallèle à AB, on a

$$AK = \frac{MP.OA}{XP},$$

d'où

$$AK^2 = \frac{GP}{OP} OA^2.$$

Par suite,

$$h^2 \geqslant \frac{GP}{OP}(2a^2 + h^2 + 2a\sqrt{a^2 + h^2})$$

ce qui, après des réductions faciles, donne $\overset{h}{p} \geqslant PQ$.

QUESTIONS PROPOSÉES

405. — Deux circonférences sont tracées et l'une d'elles passe par le centre de l'autre.

Construire, en ne faisant usage que de la règle :

1° Les centres de ces circonférences,

2° Leurs centres de similitude,

3° Les tangentes communes et leurs points de contact.

(B. Sollertinsky.)

406. — DE étant une corde de la circonférence circonscrite à un triangle ABC; F, G les points de rencontre de DB, DC avec une sécante variable AZ; H, K les points où les parallèles à DE par F, G rencontrent AE. Quel est le lieu de l'intersection M des droites BH, CK, lorsque AZ tourne autour de A?

(Bernès.)

407. — Deux ellipses égales et de même centre O ont leurs grands axes perpendiculaires; P est un point quelconque de la première, Q et Q′ les points de la seconde où les tangentes sont perpendiculaires à OP, et M, M′ les points milieux de PQ, PQ′.

a et b étant les demi-axes des deux ellipses, démontrer que

OMPM′ est un parallélogramme dont les côtés sont $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$, et dont les bissectrices des angles ont les directions des axes des deux courbes. *(Laisant.)*

408. — A_1, A_2, A_3, A_4, étant quatre points pris sur une sphère, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{42} & d_{41} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

n'est jamais positif. (Nota. — Le symbole d_{ik} représente le carré de la distance des points A_i, A_k.) *(L. Bénezech.)*

409. — Sur deux droites données, issues du sommet du triangle ABC, déterminer un couple de points *antigonaux* (ou jumeaux). *(Bernès.)*

410. — Si, sur deux droites anti-parallèles relativement à l'angle A du triangle ABC et issues du sommet A, on considère deux couples de points inverses M et M′, N et N′, le second point d'intersection des circonférences AMN′, ANM′ est sur la circonférence ABC. *(Bernès.)*

RECTIFICATIONS ET ERRATA

P. 42, dernière ligne. *Au lieu de* jumeaux, *lisez* points tripolairement associés.

P. 116, l. 4 (en remontant). *Au lieu de* BC″ *lisez* BC (fig. 2).

P. 117, l. 10 — — $\widehat{MPB}$ — $\widehat{MBP}$.

P. 148, l. 11 — — a BC — au milieu de BC.

P. 158, n° 166 — $\frac{1}{2}$ Sr — 2S(2R + r).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15494-7-91.

NOTE SUR LA SOMME ET LE PRODUIT

DE DEUX NOMBRES ENTIERS POSITIFS

Par M. **Charles Michel**, élève au Collège Chaptal.

Théorème I. — 1. *Quand la somme de deux entiers positifs* a *et* b *est plus grande que leur produit, l'un au moins de ces nombres est égal à l'unité.*

Soit $b > 1$, et soit

$$ab < a + b. \tag{1}$$

Je dis que $a = 1$.

En effet, de l'inégalité (1) on tire

$$a(b - 1) < b$$

ou, en divisant par le nombre *positif* b − 1,

$$a < 1 + \frac{1}{b-1}.$$

Le maximum de $1 + \frac{1}{b-1}$ a lieu pour le minimum de b; c'est-à-dire pour $b = 2$. Donc a, étant un nombre entier inférieur à 2, est égal à 1.

2. — Si $b = 1$, l'inégalité (1) est vérifiée pour toutes les valeurs de a.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux nombres entiers soit inférieur à leur somme est que l'un de ces nombres soit l'unité.*

3. — *Maximum de l'expression* a + b − ab. — Nous avons vu que $a + b$ peut être supérieur à ab; ainsi, le maximum est positif. Mais alors l'un des nombres a est 1, et

$$a + b - ab = 1,$$

quel que soit b.

Le maximum cherché est donc égal à l'unité.

Ainsi, *la somme de deux nombres entiers ne peut surpasser leur produit de plus d'une unité.*

4. — Si l'on a la relation $a + b - ab = 1$, l'un des nombres est égal à 1. Car l'équation peut être écrite ainsi

$$(a - 1)(b - 1) = 0,$$

et cette égalité exige que a, ou b, soit égal à 1.

Théorème II. — **5.** *Deux fractions irréductibles qui ont pour somme un nombre entier ont même dénominateur.*

Soient les deux fractions irréductibles $\frac{x}{y}$, $\frac{u}{v}$ dont la somme est un entier m.

On a

$$(1) \qquad \frac{x}{y} + \frac{u}{v} = m$$

or

$$\frac{x}{y} + \frac{my - x}{y} = m.$$

Donc

$$\frac{my - x}{y} = \frac{u}{v}.$$

y divise my et ne divise pas x; donc y ne divise pas $my - x$. Les deux fractions égales $\frac{my - x}{y}$ et $\frac{u}{v}$ sont donc irréductibles et leurs dénominateurs sont égaux.

Autrement. — De l'égalité (1) on tire

$$xv + uy = mvy;$$

v divisant le second membre divise le premier; par suite, uy; étant premier avec u. il divise y. On voit de même que y divise u. Donc $y = v$. Cette condition n'est pas suffisante, mais comme elle est nécessaire, *deux fractions irréductibles qui n'ont pas même dénominateur ne peuvent avoir pour somme un nombre entier.*

Théorème III. — **6.** *Deux nombres entiers, dont la somme est égale au produit, sont égaux à 2.*

De l'égalité

$$(1) \qquad a + b = ab,$$

on tire

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Les fractions irréductibles $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ont donc même dénominateur. On a $b = a$; et, par suite, $b = a = 2$.

Autrement. — De (1) on tire

$$a = \frac{b}{b-1} = 1 + \frac{1}{b-1},$$

$\frac{1}{b-1}$ doit être entier, $-b$ ne peut donc prendre que la valeur 2 ; alors $a = 2$.

Problème. — 7. *Dans quels cas la somme de deux nombres entiers est-elle divisible par leur produit?*

Le problème revient à résoudre en nombres entiers l'équation

$$x + y = xyz.$$

On en déduit $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z.$$

Par suite (théorème II), $x = y$. Alors $z = \frac{2}{x}$; x ne peut prendre que les valeurs 1, 2, qui donnent pour z les valeurs 2, 1.

On a donc les deux solutions

1° $x = y = 2$, $z = 1$ (voir le théorème III)

2° $x = y = 1$, $z = 2$.

Il résulte de là que *la somme de deux nombres entiers inégaux n'est jamais divisible par leur produit.*

Théorème IV. — 8. *Quand le produit de deux nombres* a, b *est plus grand que leur somme, la somme et le produit sont plus grands que* 4.

On suppose

$$ab > a + b,$$

et, par suite, $$a^2b^2 > (a+b)^2.$$

Mais, on a

(1) $$(a+b)^2 \geqslant 4ab.$$

Donc *a fortiori* $$a^2b^2 > 4ab,$$

d'où $$ab > 4.$$

L'inégalité (1) prouve alors que l'on a

$$(a+b)^2 > 16$$

ou $$a + b > 4.$$

Remarque. — Dans le cas particulier où les nombres sont entiers, on peut donner la démonstration suivante :

Le produit étant plus grand que la somme, les nombres sont plus grands que l'unité (théorème I) et ne sont pas égaux

simultanément à 2 (théorème III). La somme et le produit des deux nombres sont donc plus grands que 4.

Théorème V. — 9. *Si le produit de deux nombres entiers* a *et* b *est plus grand que* 4, *ces deux nombres étant différents de* 1, *il est plus grand que leur somme.* Car si ab était plus petit que $a+b$, l'un des nombres serait 1 ; et si ab était égal à $a+b$, le produit serait 4. Donc, etc.

On peut démontrer ce théorème directement, en observant que les deux nombres se mettent sous la forme $2+\alpha$, $2+\beta$, α et β étant des entiers, non nuls simultanément.

Le théorème en question peut encore s'énoncer ainsi :

Quand deux nombres ne sont pas inférieurs à 2, *et ne sont pas égaux à* 2 *simultanément, leur produit est plus grand que leur somme.*

En particulier :

Quand deux nombres inégaux sont différents de 1, *leur produit est plus grand que leur somme.*

Enfin, dans cet ordre d'idées, nous traiterons un dernier problème.

10. — *Résoudre en nombres entiers, positifs, l'équation :*

$$\text{(A)} \qquad xyz = x + y + z.$$

Les inconnues sont deux à deux inégales. En effet, je dis que si l'on donne à y et à z une même valeur a, x ne peut pas être un nombre entier.

L'équation proposée deviendrait en effet

$$x + 2a = xa^2;$$

d'où $$x = \frac{2a}{a^2-1} = \frac{(a+1)+(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}.$$

Or, d'après le théorème II, les fractions irréductibles $\frac{1}{a+1}$ et $\frac{1}{a-1}$, qui ont des dénominateurs inégaux, ne peuvent avoir pour somme un nombre entier.

Les nombres x, y, z sont donc inégaux deux à deux. Soit x le plus petit. Alors les deux autres y, z sont différents de 1 ; car, si l'un était égal à 1, ou il serait plus petit que x, ce qui est contraire à l'hypothèse, ou il serait égal à x, ce qui est impossible.

Donc les nombres y et z étant différents de 1, et non égaux simultanément à 2, leur produit est plus grand que leur somme (théorème V). On a

$$(1) \qquad yz > y + z.$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par x; il vient

$$xyz > x(y + z)$$

d'où, d'après (A), $x + y + z > x(y + z)$.

L'inégalité (1) donne encore :

$$x + yz > x + y + z \qquad \text{ou} \qquad x + yz > xyz.$$

Dans les deux cas, on obtient deux nombres (x. $y + z$, dans le premier cas; x, yz dans le second) dont le produit est plus petit que la somme; l'un de ces nombres est donc égal à 1 (théorème I) et comme $y + z$ et yz sont différents de 1, on a

$$x = 1.$$

Il reste alors à résoudre l'équation

$$1 + y + z = yz,$$

qui donne $$z = \frac{y + 1}{y - 1} = 1 + \frac{2}{y - 1}.$$

$\frac{2}{y - 1}$ doit être un nombre entier. Par suite, on a seulement deux hypothèses à faire :

$$y - 1 = 1, \quad \text{d'où} \quad y = 2 \quad \text{et} \quad z = 3;$$

et $$y - 1 = 2, \quad \text{d'où} \quad y = 3 \quad \text{et} \quad z = 2.$$

Ces deux résultats rentrent l'un dans l'autre, et le problème ne comporte qu'une solution (1, 2, 3).

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès**,

(*Suite*, voir page 175.)

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES POINTS CONJUGUÉS, SUR LE TRANSFORMÉ RECTILIGNE D'UN TRIANGLE ET SUR LE TRANSFORMÉ D'UN CERCLE

XI. — Le théorème *que les transformés de deux points symétriques relativement à* BC *sont conjugués* est susceptible d'une généralisation importante, toute différente de celles qui viennent d'être indiquées.

Remarquons d'abord que si deux points M, N sont conjugués relativement à un triangle, ils le sont relativement à tout triangle inscrit au même cercle, de sorte que, faisant abstraction du triangle, on peut dire qu'ils sont conjugués relativement au cercle. La propriété par laquelle nous les supposons définis, c'est *qu'ils divisent harmoniquement un diamètre du cercle*, ou ce qui revient au même, *que le rapport des distances de ces deux points, à un point variable* P, *du cercle est constant :* $\frac{PM}{PN} = K$. Si G est le centre du cercle et ρ son rayon, cette constante est égale à $\frac{GM}{\rho}$ ou $\frac{\rho}{GN}$ ou $\sqrt{\frac{GM}{GN}}$. Leur situation relative consiste à être en ligne droite avec G, d'un même côté de G, et à des distances telles que $GM.\,GN = \rho^2$.

Théorème. — *Lorsque deux points* M, N *sont conjugués relativement à un cercle* G, *leurs transformés* m, n *sont conjugués relativement au cercle* G′, *transformé du cercle* G (*).

La relation caractéristique $\frac{PM}{PN} = K$, devient en effet, en appelant p le transformé de P :

$$\frac{pm}{pn} \cdot \frac{An}{Am} = K, \qquad \text{ou} \qquad \frac{pm}{pn} = K\,\frac{Am}{An};$$

relation qui montre que m, n sont conjugués, relativement au cercle G′.

Dans le cas particulier où le cercle G passe par A, la constante K est égale à $\frac{AM}{AN}$ ou $\frac{An}{Am}$; alors $K.\,\frac{Am}{An}$ est égal à 1, et l'on a, pour tout point p de la droite qui est alors la transformée du cercle, $pm = pn$, c'est-à-dire que m et n sont symétriques relativement à cette droite. On est ainsi conduit à regarder deux points symétriques, relativement à une droite, comme conjugués relativement au cercle, de rayon infini, qui se confond avec cette droite. A priori, d'ailleurs, la droite mn, formée par ces deux points symétriques, détermine, sur ce cercle de rayon infini, un diamètre dont l'une des extrémités est le milieu

(*) La démonstration donnée par M. Gob du théorème préliminaire s'applique, ici, sans modification.

de la droite, l'autre étant à l'infini ; m, n divisent donc harmoniquement ce diamètre, et doivent être considérés comme conjugués relativement au cercle. On voit ainsi comment le théorème relatif aux transformés de deux points symétriques sur BC rentre, comme cas particulier, dans le théorème général que nous venons d'établir.

Le même théorème peut s'énoncer ainsi : *Tout cercle qui a son centre sur* MN *et qui divise* MN *harmoniquement a pour transformé un cercle qui a son centre sur* mn *et qui divise* mn *harmoniquement.*

Il importe aussi d'observer que, si le cas particulier de deux points symétriques relativement à BC se rapporte spécialement à l'*inversion symétrique*, en ce qu'il suppose que BC et le cercle ABC sont les transformés l'un de l'autre, le théorème général subsiste, aussi bien dans l'inversion ordinaire que dans l'inversion symétrique,

Corollaire. — *Lorsque deux cercles* G, G_1 *sont tels que chacun d'eux est le lieu des conjugués des points de l'autre, relativement à un cercle* O_1*; les transformés* G′, G'_1, *de ces deux cercles jouissent de la même propriété, relativement au cercle* O'_1, *transformé de* O_1.

D'abord, le lieu des conjugués des points M d'un cercle G relativement au cercle O_1 est un cercle G_1. Car, si M_1 est le conjugué de M, on a

$$O_1M.O_1M_1 = R_1^2,$$

en appelant R_1 le rayon du cercle O_1. Ainsi, M_1 est le point inverse de M relativement au pôle O_1, la puissance d'inversion étant R_1^2, donc le lieu de M_1 est un cercle G_1. Cela posé les transformés m, m_1 de M. M_1 sont, d'après le théorème en question, conjugués relativement au cercle O'_1. Donc les cercles G′, G'_1, sont tels que chacun d'eux est le lieu des conjugués des points de l'autre relativement au cercle O'_1.

Cas particulier. — Si l'on considère un cercle G, passant par A et le symétrique G_1 de ce cercle relativement à une droite L, les transformés G′, G'_1 de ces deux cercles auront leurs points deux à deux conjugués, relativement au cercle transformé de la droite L.

Comme exemple prenons le cercle ABC et le cercle HBC passant par l'orthocentre H. On sait qu'ils sont symétriques relativement à BC. On voit aisément que le transformé du cercle HBC est le cercle OBC; et comme BC et la circonférence ABC sont transformés l'un de l'autre, on en conclut que le cercle OBC est le lieu des conjugués de la droite BC, relativement au cercle ABC; ce qui se vérifie sans peine.

RELATIONS CONCERNANT LES CENTRES DE DEUX CERCLES, SYMÉTRIQUEMENT INVERSES, ET LES TRANSFORMÉS DE CES CENTRES

Parmi les couples de points conjugués relativement à un cercle G, il faut noter particulièrement le couple formé par le centre G et un point quelconque à l'infini. Le point à l'infini a pour transformé le point A; d'où cette proposition :

Le centre G *d'un cercle a pour transformé* g *point conjugué de* A *relativement au cercle* G′ *qui est le transformé du cercle* G, *c'est-à-dire un point tel que le rapport des distances de tout point du cercle* G′ *à ce point* g *et au point* A *est constant.*

De même, si g' est le conjugué de A relativement au cercle G, le centre G′ du cercle G′ est le transformé du point g'.

En partant du cercle G dont le centre et le rayon sont supposés connus, on a g par la relation $Ag.AG = bc$; g' par la relation $Gg'.GA = \rho^2$ laquelle peut se mettre sous la forme $Ag'.AG = A_G$, où A_G désigne la puissance de A relativement au cercle G; puis G′ par la relation $AG'.Ag' = bc$, ou $\frac{AG'}{AG} = \frac{bc}{A_G}$.

Cette dernière relation, en y permutant les deux cercles, se complète ainsi :

$$\frac{AG'}{AG} = \frac{bc}{A_G} = \frac{A_{G'}}{bc}.$$

Quant au rayon ρ' de la circonférence G′, outre qu'il résulte de la connaissance de $A_{G'}$, il est donné par cette proposition à noter : *les rayons* ρ, ρ' *sont proportionnels aux distances* AG, AG′. Si, en effet, P est un point quelconque du cercle G et p son transformé, on a, puisque g et A sont conjugués relativement au cercle G′,

$$\frac{pg}{Ap} = \frac{\rho'}{AG'}.$$

Or d'après la règle de transformation,

$$\frac{pg}{pA} = \frac{PG}{AG} = \frac{\rho}{AG}.$$

Donc
$$\frac{\rho'}{AG'} = \frac{\rho}{AG}.$$

Ce résultat est évident dans l'inversion ordinaire, où A est un centre de similitude des deux cercles; il subsiste donc dans l'inversion symétrique. On en tire, pour l'expression directe de ρ' en fonction des données : $\rho' = \rho . \frac{bc}{A_G}$.

Un autre point à remarquer est que les deux droites AG, AG′ sont antiparallèles, car AG′, par exemple, contient le transformé de g de G. Cela résulte aussi de ce que dans l'inversion ordinaire, ces deux droites sont en coïncidence.

Cas particulier. — Dans le cas particulier où le cercle G passe par A et où, par conséquent, le cercle G′ devient une droite, *le transformé du centre* G *est le symétrique de* A *relativement à cette droite.* Le centre G′ est à l'infini, et g' coïncide avec A.

Remarque. — Observons encore que *tous les cercles qui ont même centre* G *ont pour transformés des cercles qui tous ont leur centre sur* Ag *et divisent* Ag *harmoniquement. Et, réciproquement, les transformés de tous les cercles qui jouissent de cette propriété sont des cercles qui ont pour centre commun* G.

XII. — On peut parvenir au même théorème sur les transformés de deux points conjugués par de simples considérations angulaires, qui vont nous fournir un autre théorème important.

RELATIONS ANGULAIRES ENTRE UN TRIANGLE ET SON TRANSFORMÉ RECTILIGNE

Nous entendons par *transformé rectiligne* d'un triangle DEF le triangle rectiligne qui a pour sommets les transformés d, e, f des sommets du premier. Le *transformé curviligne* serait le triangle curviligne qui aurait pour côtés les arcs de cercle qui sont les transformés des côtés du premier, ses sommets seraient toujours d, e, f.

Lemme. — *Si* e, f, m *sont les transformés de trois points* E, F, M, *l'angle sous lequel, de* m, *on voit* ef, *est égal à la différence des angles sous lesquels* EF *est vu de* M *et du pôle* A :

$$(me, mf) = (ME, MF) - (AE, AF).$$

On a en effet

$$(me, mf) = (me, mA) + (mA, mf);$$

Or les triangles A*me*, AEM étant directement semblables, $(me, mA) = (EM, EA)$; et la similitude directe de A*mf*, AFM donne $(mA, mf) = (FA, FM)$.

Donc

$$(me, mf) = (EM, EA) + (FA, FM) = (ME, MF) - (AE, AF).$$

Remarque. — Comme les triangles AEF, A*fe* sont semblables, on peut remplacer (AE, AF) par (A*f*, A*e*) ou $-$ (A*e*, A*f*) et l'on aurait aussi :

$$(ME, MF) = (me, mf) - (Ae, Af).$$

Dans l'inversion ordinaire, où les triangles employés sont symétriquement semblables, la même explication donnerait

$$(ME, MF) + (me, mf) = (AE, AF) = (Ae, Af).$$

Corollaire. — Si D, E, F désignent les angles du triangle DEF et D′, E′, F′ ceux du triangle *def*, on a les relations :

$$D' = D - (AE, AF) \quad E' = E - (AF, AD), \quad F' = F - (AD, AE);$$

ou bien

$$D = D' - (Ae, Af) \quad E = E' - (Af, Ad), \quad F = F' - (Ad, Ae).$$

Ces relations montrent que DEF, *def* ne peuvent être directement semblables. La condition pour qu'ils soient symétriquement semblables est $(AE, AF) = 2D$, $(AF, AD) = 2E$. Ceci entraîne $(AD, AE) = 2F$, c'est-à-dire que A doit être le centre du cercle DEF et, par suite, le centre du cercle *def*.

Remarque. — Il convient de noter les relations qui concernent les côtés.

On a
$$ef = \frac{bc.EF}{AE.AF};$$

d'où
$$\frac{ef}{EF.AD} = \frac{fd}{FD.AE} = \frac{de}{DE.AF} = \frac{bc}{AD.AE.AF}$$

ou bien
$$\frac{EF}{ef.Ad} = \frac{FD}{fd.Ae} = \frac{DE}{de.Af} = \frac{bc}{Ad.Ae.Af}.$$

Nous arrivons ainsi au théorème que nous avons principalement en vue.

Théorème. — *Si l'on considère un triangle* DEF *et son transformé rectiligne* def, *et deux points quelconques* M, m *transformés l'un de l'autre, le triangle podaire de* M, *relativement à* DEF, *et le triangle podaire de* m, *relativement à* def *sont directement semblables.*

Désignons en effet par λ, μ, ν les coordonnées angulaires de M, relativement à DEF, et par λ', μ', ν' celles de *m*, relativement à *def*.

On a, d'après le lemme,

$$\lambda' = \lambda - (AE, AF)$$

et

$$D' = D - (AE, AF);$$

d'où

$$\lambda' - D' = \lambda - D.$$

De même, $\mu' - E' = \mu - E$, $\nu' - F' = \nu - F$.

Or $\lambda - D$, $\mu - E$, $\nu - F$ sont les angles du podaire de M relativement à DEF, et $\lambda' - D'$, $\mu' - E'$, $\nu' - F'$ les angles du podaire de *m*, relativement à *def*. Donc ces deux podaires sont directement semblables.

Remarque. — Si M′ est l'isogonal de M relativement à DEF, *m′* l'isogonal de *m* relativement à *def*, le théorème pourrait encore s'énoncer sous cette forme : *les coordonnées angulaires de* M′, *relativement à* DEF, *sont respectivement égales aux coordonnées angulaires de* m′, *relativement à* def.

Cas particulier. — Si DEF coïncide avec ABC, le triangle *def* devient XBC où X désigne un point quelconque à l'infini. De là cette proposition, facile à vérifier directement : *Si par* B *et* C *on trace deux parallèles quelconques et qu'on projette un point* m *en* q, r, *sur la première et la seconde de ces droites, et en* p *sur* BC, *le triangle* pqr *reste constamment semblable à lui-même, quelle que soit la direction des parallèles ; il est semblable au podaire de* M *relativement à* ABC, M *étant le transformé de* m.

Nous retrouvons aussi, par là, le théorème sur les points conjugués, qu'on peut énoncer ainsi : *Si* M, N *sont conjugués relativement à un triangle* DEF, *leurs transformés* m, n *le sont relativement au transformé rectiligne* def *de* DEF.

En effet λ, μ, ν ; λ', μ', ν' étant les coordonnées angulaires

de M relativement à DEF, de m relativement à def; et λ_1, μ_1, ν_1; λ'_1, μ'_1, ν'_1 celles de N et n relativement aux mêmes triangles les égalités

$$\lambda - D = \lambda' - D', \quad \lambda_1 - D = \lambda'_1 - D',$$

donnent $$\lambda + \lambda_1 - 2D = \lambda' + \lambda'_1 - 2D'.$$

Or, par hypothèse, $\lambda + \lambda_1 = 2D$;

donc $$\lambda' + \lambda'_1 = 2D';$$

et de même $$\mu' + \mu'_1 = 2E', \nu' + \nu'_1 = 2F.$$

Donc m, n sont conjugués relativement à def.

Théorème. — *Lorsque deux triangles* DEF, GHK *sont directement semblables, la condition pour que leurs transformés* def ghk *le soient aussi, c'est que le pôle* A *soit le point autohomologue des deux triangles donnés.*

Appelons encore D, E, F; D', E', F' les angles de DEF, *def*, et, de même, G, H, K; G', H', K' ceux de GHK, *ghk*. On a

$$D' = D - (AE, AF), \; G' = G - (AH, AK).$$

Comme on a D = G et que D' doit égaler G', on en conclut

$$(AE, AF) = (AH, AK).$$

De même

$$(AF, AD) = (AK, AG), \; (AD, AE) = AG, AH).$$

Or, si A' est, dans GHK, l'homologue de A, dans DEF, on aura

$$(A'H, A'K) = (AE, AF), \; (A'K, A'G) = (AF, AD), \; (A'G, A'H) = (AD, AE).$$

Les points A et A' ont donc les mêmes coordonnées angulaires relativement au triangle GHK, donc ils coïncident et A' se confond avec A. Ainsi, A est le point autohomologue des triangles donnés, et par suite aussi de *def*, *ghk*. Il est évident d'ailleurs que cette condition nécessaire pour la similitude de *def*, *ghk* est aussi suffisante.

Le raisonnement est en défaut lorsque les coordonnées angulaires de A' relativement aux triangles GHK sont égales aux angles G, H, K de ce triangle; alors, de l'égalité des coordonnées de A et A', on ne peut conclure l'identité de ces deux points. Le point A est simplement, dans ce cas, un point commun aux circonférences DEF, GHK. Mais alors ces circonférences ont pour transformées des lignes droites, les deux triangles *def*, *ghk* se réduisent à des droites; ce qui résulte

d'ailleurs aussi, de ce que, dans ce cas, D, E′, F′, G′, H′, K′ sont nuls. La similitude des deux figures *def*, *ghk* exige ici que l'on exprime que les côtés sont proportionnels; alors d'après les formules indiquées plus haut, on a

$$\frac{AD}{AG}=\frac{AE}{AH}=\frac{AF}{AK}.$$

Or si A′ est le point de GHK homologue à A dans DEF,

On a $$\frac{A'G}{AD}=\frac{A'H}{AE}=\frac{A'K}{AF}.$$

Donc $$\frac{A'G}{AG}=\frac{A'H}{AH}=\frac{A'K}{AK}.$$

Les deux points A, A′ ayant, relativement à GHK, leurs coordonnées tripolaires proportionnelles coïncident ou sont conjugués relativement à ce triangle. Mais A étant sur la circonférence GHK est son propre conjugué; donc A et A″ coïncident; c'est-à-dire que, dans ce cas, particulier encore, la condition de similitude est que A soit le point autohomologue des deux triangles donnés.

Transformé curviligne du triangle DEF. Les sommets sont encore *d*, *e*, *f*, mais les droites *ef*, *fd*, *de* sont remplacées par les arcs qu'elles sous-tendent dans les circonférences A*ef*, A*fd*, A*de*. Les trois angles de ce triangle curviligne sont égaux à D, E, F. Et si l'on considère les arcs *md*, *me*, *mf* des circonférences *m*A*d*, *m*A*e*, *m*A*f*, les angles formés par *me*, *mf*, par *mf*, *md*, par *md*, *me*, qu'on pourrait appeler les *coordonnées angulaires curvilignes* du point *m* relativement à *def*, sont égaux aux coordonnées angulaires rectilignes λ, μ, ν du transformé M, relativement à DEF. Ce sont là des conséquences évidentes du principe de la conservation des angles dans l'inversion symétrique.

XIII. — Nous terminerons ce qui concerne les points conjugués, par une autre propriété remarquable.

Théorème. — *Si* A, A′ *sont deux points coujugués, relativement à un cercle* ω *et* L, *la perpendiculaire à* AA′ *en son milieu*; *le carré de la distance de tout point* M *du cercle à l'un des points conjugués est proportionnel à la distance* PM *de la*

droite L *à ce point* M. *Plus explicitement, on a* $\overline{AM}^2 = 2A\omega.PM$, $\overline{A'M}^2 = 2A'\omega.PM$.

Ces relations rentrent l'une dans l'autre, car

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{A'M}^2} = \frac{A\omega}{A'\omega}.$$

La manière dont l'inversion symétrique s'applique à la démonstration est à remarquer.

Prenons deux points arbitraires B, C sur L, et soient ABC le triangle de référence, O le centre de la circonférence ABC, R son rayon, h la hauteur qui part de A et qui est moitié de AA'. La puissance de transformation est bc ou $2Rh$.

Les points A, A' conjugués relativement au cercle ω, ont pour transformés (§ XI) deux points conjugués relativement au cercle ω', transformé du cercle ω; et, comme le transformé de A est à l'infini, le transformé de A' est le centre du cercle ω'. Mais on sait que A', symétrique de A relativement à BC, a pour transformé O; donc O est le centre de la circonférencé ω'. Soit ρ' le rayon de cette circonférence, et soit m l'un quelconque de ses points, supposé le transformé de M. Dans l'égalité $\overline{Om}^2 = \rho'^2$, ou $\overline{Om}^2 - R^2 = \rho'^2 - R^2$, on a

$$Om = \frac{A'M.bc}{AA'.AM} = \frac{R.A'M}{AM};$$

d'où

$$\frac{R^2\left(\overline{A'M}^2 - \overline{AM}^2\right)}{\overline{AM}^2} = \rho'^2 - R^2.$$

Or $\qquad \overline{A'M}^2 - \overline{AM}^2 = -2AA'.PM = -4h.PM.$

D'ailleurs $R^2 - \rho'^2$ étant la puissance de A, relativement à la circonférence ω', on a (§ XI)

$$R^2 - \rho'^2 = bc.\frac{AO}{A\omega} = \frac{2R^2h}{A\omega}.$$

Donc $\qquad \dfrac{2PM}{\overline{AM}^2} = \dfrac{1}{A\omega}, \quad$ ou $\quad \overline{AM}^2 = 2A\omega.PM.$

Une démonstration plus directe s'appuie sur cette proposition, dont les applications sont fréquentes, et que nous admettrons : *La différence des puissances d'un point* M, *relativement à deux circonférences* I, I' *est égale, en grandeur et signe, au double produit de la distance des centres* I I', *par la distance de l'axe radical au point* M.

Considérons A comme un cercle réduit à son centre, l'axe radical de ce cercle et du cercle ω est, comme on sait, égale à distance de A et de sa polaire, relativement au cercle ω; c'est donc la droite L. Si M est un point quelconque du cercle ω, sa puissance, relativement à ce cercle, est zéro, et sa puissance relativement au cercle A est $\overline{AM}^2$. On a donc, d'après le lemme, $\overline{AM}^2 = 2A\omega . PM$.

La transformation de ce théorème conduit naturellement à une propriété de deux points symétriques relativement à BC, puisque les transformés de deux points conjugués sont symétriques relativement à BC. Soient F, G deux points symétriques, relativement à BC, f, g leurs transformés qui sont conjugués relativement au cercle ABC, M un point quelconque de BC, m son transformé, c'est-à-dire un point quelconque du cercle ABC, l la droite perpendiculaire à fg en son milieu, p la projection de m sur cette droite, le théorème que $\frac{\overline{fm}^2}{pm}$ est constant, se transforme en cet autre, peu simple : *Si, sur la circonférence qui passe par* A *et par un point quelconque* M *de* BC, *et qui est tangente à la circonférence* AFG, *on prend le point* P *tel que* $\frac{PF}{PG} = \frac{AF}{AG}$, *le rapport* $\frac{\overline{FM}^2}{PM}$ *est proportionnel au rapport* $\frac{AM}{AF}$. *(A suivre.)*

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION

DE M. SCHOUTE

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite* et *fin*, voir p. 153.)

---

11. — On sait que si l'on prend un point P dans le plan du triangle ABC, le triangle podaire de ce point sera *direct* ou *rétrograde*, c'est-à-dire, de même sens de rotation que ABC ou de sens contraire, suivant que P sera intérieur ou extérieur au cercle ABC.

Les points P_2, P'_2 tels, que leurs triangles podaires soient inversement semblables, doivent satisfaire aux relations

$$\frac{AP'_2}{AP_2} = \frac{BP'_2}{BP_2} = \frac{CP'_2}{CP_2}.$$

Elles prouvent que le cercle ABC est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances aux points fixes P_2, P'_2 est constant. La droite P_2, P'_2 passe alors par le centre O du cercle circonscrit; et les deux points P_2, P'_2 sont conjugués harmoniques par rapport à ce cercle; donc

$$OP_2 . OP'_2 = R^2.$$

Les points P_2, P'_2 ont leurs coordonnées tripolaires proportionnelles aux mêmes quantités; ils ont été appelés, par M. Neuberg, *points tripolairement associés*. Le point P'_2 est, on le voit, le transformé de P_2 dans le système R_0. Par conséquent :

La transformation par points tripolairement associés n'est autre que la transformation, par rayons vecteurs réciproques, à centre O *et à puissance* $+ R^2$.

Nous avons vu qu'on obtient le point jumeau d'un point donné en passant par les trois transformations successives IR_0I; d'après cela, *les points inverses* P_2, P'_2 *de deux points jumeaux* P, P′ *sont des points tripolairement associés.*

Applications. — Les centres isodynamiques V, W, inverses des centres isogones V_2, W_2, sont des points tripolairement associés; leurs coordonnées tripolaires sont proportionnelles aux carrés a^2, b^2, c^2 des côtés du triangle ABC.

Dans les groupes de points jumeaux formés par les points de Brocard et les isobariques du point de Steiner, les points de Brocard sont inverses l'un de l'autre; donc les inverses des isobariques du point de Steiner forment, avec les points de Brocard, deux groupes de points tripolairement associés. Les coordonnées tripolaires (X, Y, Z) des points de Brocard sont données par les formules

$$\frac{a^2X}{b^2} = \frac{b^2Y}{c^2} = \frac{c^2Z}{a^2},$$

$$\frac{c^2X}{a^2} = \frac{a^2Y}{b^2} = \frac{b^2Z}{c^2},$$

qui font connaître aussi les coordonnées tripolaires de ρ_2, ρ'_2 inverses de ρ, ρ'.

12. — Observons qu'on peut encore établir une certaine correspondance entre deux points tripolairement associés et un point remarquable du plan du triangle.

En effet, si par le milieu de la droite P_2, P'_2 qui joint deux points tripolairement associés, on mène une perpendiculaire ϖ_0 à cette droite, elle coupera les côtés de ABC, BC par exemple, en un point A_1. La circonférence Δ_a décrite de A_1 comme centre et passant par P_2, P'_2 sera orthogonale au cercle circonscrit et coupera BC en deux points A′ et A″ conjugués harmoniques par rapport à ce côté. Si B′, B″ et C′, B″ sont les points analogues de A′, A″, les droites AA′, BB′, CC′ se couperont en un même point P_0, et les trois points A″, B″, C″ seront sur la droite harmoniquement associée à P_0. On verra facilement que *les coordonnées barycentriques de* P_0 *sont inversement proportionnelles aux coordonnées tripolaires* (X, Y, Z) *de* P_2, P'_2.

La droite ϖ_0, qui contient les centres des trois cercles Δ_a, Δ_b, Δ_c, est importante à considérer. Si l'on se reporte à la troisième construction du deuxième potentiel d'un point donné. indiquée par M. de Longchamps (J. E. 1886 p. 201) on voit que ϖ_0 est la droite harmoniquement associée au deuxième potentiel de P_0. Donc :

Deux points tripolairement associés sont symétriques par rapport à la droite harmoniquement associée au deuxième potentiel du point dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux coordonnées tripolaires des points considérés.

En transformant ce résultat par inversion trilinéaire, on aurait une nouvelle propriété des points jumeaux.

Si l'on cherchait les points M_2, M'_2, dont les coordonnées tripolaires sont proportionnelles à X, Y, Z, on pourrait se servir du deuxième potentiel. associé au point dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à X, Y, Z. Autrement dit, les points M_2, M'_2 sont à l'intersection des *cercles isotomiques* (cercles symétriques par rapport aux médiatrices correspondantes) de Δ_a, Δ_b, Δ_c. La droite μ_0, perpendiculaire au milieu de $M_2M'_2$, est la transversale réciproque de ϖ_0.

Application. — Les cercles d'Apollonius se coupent aux centres isodynamiques ; leurs isotomiques se coupent aux centres isologiques.

Les remarques précédentes permettent de construire facilement deux points dont les coordonnées tripolaires sont proportionnelles à trois quantités données.

Le sujet dont nous venons de dire quelques mots est loin d'être épuisé; mais, sans nous étendre davantage, voici quelques renseignements bibliographiques relatifs à cette étude.

F. J. Van den Berg. — *Over twee met betrekking tot een driehoeck symmetrische groepen van drie cirkels en over twee dergelijke groepen van rechte lijnen.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 1881, deel VII, p. 78.

P. H. Schoute. — 1° *Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformaties.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 1882, deel IX, p. 117.

2° *Deux cas particuliers de la transformation birationnelle.* Bulletin de Darboux, 1882.

Ce mémoire est une traduction française du précédent, paru primitivement en hollandais.

3° *Over een nauwer verband hisschen Hoek en Cirkel van Brocard.* Bulletin de l'Académie d'Amsterdam, 1886, pp. 39-62.

Étude des cercles de Schoute, triangles podaires, points tripolairement associés, points jumeaux, etc.

J. Neuberg. — *Sur le point de Tarry*, Mathesis 1886, p. 5.

A. Artzt. — *Programme de Recklinghausen.* 1886.

J. Neuberg et A. Gob. — *Sur les foyers de Steiner d'un triangle.* A. F. Congrès de Paris, 1889, pp. 179-196.

Cette communication contient de nombreuses et nouvelles propriétés des points jumeaux.

E. Lemoine. — *Contributions à la géométrie du triangle.* A. F. Paris 1889, pp. 197-222.

Un paragraphe de ce mémoire (pp. 206-213) est consacré à l'étude de questions relatives aux coordonnées tripolaires et aux points jumeaux.

W. Fuhrmann. — *Sur un nouveau cercle associé à un triangle.* *Mathesis* 1890, pp. 105-111.

J. Neuberg. — *Sur les projections et les contre-projections d'un*

triangle fixe et sur un système de trois figures directement semblables, 1890.

Cet ouvrage (XVI + 86 pages) présenté à l'Académie royale des sciences de Belgique, et publié dans ses Mémoires (tome XLIV, 1890) contient une multitude de propositions nouvelles. Les points tripolairement associés et les points jumeaux y sont l'objet d'une étude approfondie. Nous recommandons tout spécialement ce Mémoire (*) à l'attention de nos lecteurs.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(Suite, voir p. 184.*)*

178. — *Résoudre l'équation :*

$$(x + a + b)^3 - 4(a^3 + b^3 + x^3) - 12abx = 0.$$

Le premier membre est identiquement égal à :

$$3(a + b + x)(b + x - a)(a + x - b).$$

179. — *Si* δ_a, δ_b, δ_c *sont les segments de hauteurs comprises à l'intérieur du cercle inscrit à un triangle* ABC, *on a :*

$$\delta_a^2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos A = \delta_b^2 \sin^2 \frac{B}{2} \cos B = \delta_c^2 \sin^2 \frac{C}{2} \cos C$$
$$= 4r^2 \cos A \cos B \cos C.$$

On a
$$\frac{1}{4}\delta_a^2 = r^2 - (p - b - c \cos B)^2;$$

et, après des transformations successives : .

$$\frac{1}{4}\delta_a^2 = 16R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \cos B \cos C = \frac{r^2 \cos A \cos B \cos C}{\sin^2 \frac{A}{2} \cos A}.$$

180. — *Un point* M *étant donné, trouver les coordonnées du centre de gravité* P *du triangle podaire de* M. *Inversement,* P *étant donné, déterminer* M.

(*) Parmi les nombreux Mémoires que M. Neuberg a publiés dans divers recueils mathématiques, on peut se procurer les suivants à la librairie Nierstrass de Liège :

Sur les projections et les contre-projections d'un triangle fixe, et sur le système des trois figures directement semblables (XVI + 86 pages in-8°), 1890. Prix : francs.

Mémoire sur le tétraèdre (72 pages in-8°), 1884. Prix : 2 francs.

Sur quelques systèmes de tiges articulées, tracé mécanique des lignes (48 p. et 2 planches). Prix : 1 fr. 80.

Sur les axes et les foyers de l'ellipse de Steiner (32 p. in-8°), 1889 (En collaboration avec M. Gob). Prix : 1 franc.

Soient x, y, z, x_1, y_1, z_1, les coordonnées normales de M et P. On a aisément :

$$\frac{x_1}{2x+y\cos C+z\cos B}=\frac{y_1}{2y+x\cos C+z\cos A}=\frac{z_1}{2z+x\cos B+y\cos A}.$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, on trouve que ces quantités sont respectivement proportionnelles à :

$x_1(4-\cos^2 A)+y_1(\cos A\cos B-2\cos C)+z_1(\cos A\cos C-2\cos B)$

et à deux autres expressions, déduites de celle-ci par permutation circulaire des lettres.

Ces formules étant linéaires, il en résulte que si l'un des points, M ou P, décrit une certaine courbe, l'autre décrit une courbe du même degré.

181. — *Le point de Gergonne d'un triangle* ABC, *est le point de Lemoine du triangle qui a pour sommets les points de contact du cercle inscrit à* ABC, *avec les côtés de ce triangle.*

Soient A', B', C' les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de ABC. On a :

$$\frac{B'C'}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{C'A'}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{A'B'}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Appliquons en A', B', C', des forces parallèles, proportionnelles à $\cos^2\frac{A}{2}$, $\cos^2\frac{B}{2}$, $\cos^2\frac{C}{2}$; puis cherchons le point d'application de leur résultante. Soient x, y, z les coordonnées normales de ce point; on a, à une constante près :

$$x=\cos^2\frac{B}{2}(1+\cos C)+\cos^2\frac{C}{2}(1+\cos B)$$

$$x=\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}};$$

ou, en coordonnées barycentriques,

$$\alpha=\operatorname{tg}\frac{A}{2};$$

ce qui caractérise le point de Gergonne de ABC.

182. — *La droite harmoniquement associée au point de Tarry est parallèle à l'axe orthique.*

L'équation de cette droite est : (θ angle de Brocard)

$$\Sigma x\cos(A+\theta)=0$$

ou

$$\Sigma x\cos A-\operatorname{tg}\theta\,\Sigma x\sin A=0;$$

elle est donc parallèle à la droite représentée par

$$\Sigma x\cos A=0.$$

CERTIFICAT D'APTITUDE

A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

(Section des sciences. — Session de 1891.)

Mathématiques.

I. Éclipses de soleil.

II. Connaissant les équations de l'ellipse et du cercle rapportés à des axes de symétrie, démontrer que la projection orthogonale d'un cercle sur un plan qui n'est pas parallèle au plan de ce cercle est une ellipse.

III. Discuter les racines de l'équation

$$(a^2 - a - 2)x^2 + 2(a - 1)x + 2 = 0,$$

dans laquelle a est un nombre donné quelconque. Dire ensuite comment il faut prendre a pour que cette équation ait une racine, et une seule, comprise entre -1 et $+1$.

BIBLIOGRAPHIE

Die Brocardschen Gebilde, par M. le Dr A. Emmerich, 1 vol. in-8°, de XVI + 153 pages. Berlin, Georg Reimer. 1891.

L'ouvrage que vient de publier M. le Dr Emmerich, sur la Géométrie du triangle, est un exposé des parties *élémentaires* de la Géométrie brocardienne proprement dite. Les seuls sujets traités sont en effet ceux qui se rapportent aux points, droites et cercles ayant un lien commun avec les éléments de Brocard. L'auteur ne touche pas à la théorie des coniques et ne fait appel, ni à la géométrie analytique, ni à la Géométrie supérieure. Ce n'est pas un traité sur la Géométrie récente, mais un simple exposé d'une partie limitée de cette science.

La matière est divisée en soixante-treize paragraphes formant huit chapitres. Parmi ces derniers, nous signalerons, comme plus particulièrement remarquables, ceux qui traitent de l'angle de Brocard, des points de Brocard, des cercles de Tucker, Lemoine, Taylor, Brocard, Neuberg et M'Cay.

M. Emmerich a reproduit, dans son ouvrage, les élégantes démonstrations qui, sur presque tous les sujets, ont été données par divers auteurs; un très grand nombre sont nouvelles. Il a énoncé beaucoup de propositions et donné de nombreuses formules qui, toutes, sont suivies du nom de leur *premier* auteur.

Ajoutons que ce petit traité est précédé d'un index bibliographique (1816-1889) comprenant l'indication de cinquante-neuf mémoires. Nous regrettons que cette dernière partie ne soit pas plus complète et que la bibliographie française n'ait pas été traitée avec plus de justice.

Ainsi, des Mémoires si nombreux et, pour la plupart, si intéressants qui ont été publiés sur la Géométrie du triangle, dans ce Journal, *trois* seulement ont été cités!

Nous devions signaler cet étrange oubli, mais cette observation faite

nous convenons bien volontiers que *Brocardschen Gebilde* est un ouvrage qui rendra des services à la nouvelle Géométrie; ce qui est la chose essentielle. Le livre est imprimé avec luxe et de nombreuses figures sont intercalées dans le texte. Nous le recommandons à tous ceux qui veulent se faire une idée de l'intérêt et de la fécondité de cette partie de la Géométrie moderne qu'on nomme la *Géométrie Brocardienne*.

E. VIGARIÉ.

QUESTION 373

Solution par M. A. POULAIN, à Angers.

M *étant un point quelconque pris dans le plan d'un triangle* ABC, *démontrer que les puissances de* A, B, C *relativement aux circonférences circonscrites à* MBC, MCA, MAB, *et la puissance de* M *relativement à la circonférence circonscrite à* ABC, *sont inversement proportionnelles aux aires des triangles* MBC, MCA, MAB, ABC. *Montrer (en tenant compte des signes) que la somme des inverses de ces quatre puissances est nulle.* (E. Bernès.)

Soient P, P_a, ... les puissances de chaque sommet du quadrangle par rapport aux cercles correspondants; S, S_a, ... les aires des triangles correspondants, et $\mathfrak{A}$, ... les angles sous lesquels on voit, de M, les côtés de ABC.

1° Nous avons (*J. S.*, p. 96),

$$P = 2S_a(\cot g\,\mathfrak{A} - \cot g\,A),$$

et de même, en prenant MBC pour triangle de référence,

$$P_a = 2S(\cot g\,A - \cot g\,\mathfrak{A});$$

d'où $$-PS = P_aS_a = \ldots$$

2° La relation qu'il faut établir se réduit à

$$-S + S_a + S_b + S_c = 0,$$

laquelle est vérifiée, en tenant compte des signes, par tous les points du plan du triangle ABC.

NOTE (*). — La première partie de cette proposition a été signalée pour la première fois par Van Staudt. Avec un changement de notations, on peut l'énoncer ainsi :

Soient A, B, C, D, quatre points d'un même plan. Désignant par S_a, S_b, S_c, S_d, les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, et par P_a, P_b, P_c, P_d, les puissances des points A, B, C, D, par rapport aux cercles BCD, CDA, DAB, ABC, on a $$S_aP_a = S_bP_b = S_cP_c = S_dP_d = I,$$

(*) Communiquée par M. Neuberg

I étant l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesure les produits AB, CD, AC, BD, AD, BC. (Voir *J. de Crelle*, t. LVII; *Mathesis*, t. III, p. 30 et t. II, p. 82; comparez aussi *N. A. M.*, 1865, p. 78.)

Van Staudt a également donné la démonstration géométrique de l'expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre, telle qu'on peut la lire dans le *J. M. E.*, 1891, p. 49. Cette démonstration a été reproduite par M. Catalan dans ses *Théorèmes et problèmes*, 7e édition, p. 452.

QUESTION 193

Solution par M. Aug. Boutin.

Soit ABC *un triangle*, O *le centre du cercle circonscrit*, H *l'orthocentre, les circonférences des neuf points, des trois triangles* AOH, BOH, COH, *se coupent aux deux mêmes points.*

(G. Boubals.)

A titre de lemme, démontrons d'abord la proposition suivante (*) :

Soient H_a, H_b, H_c, les symétriques de H par rapport à AO, BO, CO : les quatre circonférences : ABC, AOH_a, BOH_b, COH_c se coupent en un même point M.

En effet, les angles BMO, CMO sont respectivement égaux aux angles BHO, CHO ; car les circonférences BMH_bO, CMH_cO sont les symétriques, par rapport à BO, CO, des circonférences BOH, COH ; d'ailleurs $\widehat{BMC}=\widehat{BMO}+\widehat{OMC}=\widehat{BHO}+\widehat{OHC}=\widehat{BHC}$; donc M est sur ABC.

On verrait, de même, que la circonférence AOH_a passe aussi par M.

Ceci posé, les trois circonférences considérées dans l'énoncé ont déjà, en commun, le centre E du cercle des neuf points de ABC.

Considérons le triangle $A_1B_1C_1$ qui a pour sommets les milieux des distances AH, BH, CH, et appliquons-y le lemme précédent, H étant l'orthocentre de $A_1B_1C_1$, H_a le symétrique de H, par rapport à EB_1.

Les trois circonférences B_1EH_b, C_1EH_c, A_1EH_a se coupent au même point M, situé sur la circonférence des neuf points

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

de ABC. Mais EB_1 étant parallèle à OB, H_b est le pied de la hauteur HH_b du triangle HBO, et la circonférence B_1EH_b est la circonférence des neuf points du triangle BOH. Le théorème est donc démontré.

Les deux points communs sont donc E et un point remarquable M de la circonférence des neuf points.

Remarques. — On peut encore remarquer ce qui suit :

1° Soient O_a, O_b, O_c les centres des trois circonférences considérées dans l'énoncé. Ces points sont respectivement situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée sur le milieu de EM, et des côtés du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC.

2° La transformée, par points anti-complémentaires, de la droite $O_aO_bO_c$ est une droite qui lui est parallèle et passant par E.

QUESTION PROPOSÉE

411. — Trouver quatre nombres entiers, positifs, inégaux, tels que leur somme soit égale à la somme obtenue en ajoutant au produit du plus grand par le plus petit, le produit des deux autres (*). *(Bénezech.)*

N. B. — Le problème comporte une infinité de solutions, le plus grand nombre étant arbitraire.

ERRATA

Page 56 : ligne 3, *au lieu de* M, Ω_2, Ω_1, *lisez* H, Ω_2, Ω_1, A, B, C;
— ligne 5, — Ω_1, — les jumeaux de Ω_1, Ω_2;
— ligne 8, — O, — H;
— ligne 9, — H, — O.
Page 189 : ligne 3 (en remontant), *au lieu de* $(h^2 - 2a^2)$, *lisez* $(h^2 - 2a^2)^2$;
Page 190 : ligne 4 (en remontant), — OB' — OB'_1;
Page 191 : ligne 4, *au lieu de* XP, *lisez* OP;
— ligne 8, — p — h.

(*) Énoncé emprunté à l'*Educational Times* (août 1891).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18526-8-91.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 197.)

XIV. — Autres Propriétés de deux Cercles symétriquement inverses.

Théorème I. — *1° Les transformés* g, g′ *des centres* G, G′, *de deux cercles symétriquement inverses, sont symétriques relativement à l'axe radical* X *de ces cercles; et les centres* G, G′ *sont conjugués relativement au cercle* x *qui est le transformé de cet axe radical. 2° L'axe radical du cercle* x *avec chacun des cercles* G, G′, *est* X.

1° Comme g est conjugué de A relativement au cercle G′, la perpendiculaire à Ag, en son milieu, est l'axe radical du cercle G′ et du cercle-point A. De même, la perpendiculaire à Ag', en son milieu, est l'axe radical du point A et du cercle G. Donc leur rencontre ω est sur l'axe radical X des cercles G et G′. Ce point ω est, d'après cette construction, le centre du cercle Agg'. La perpendiculaire abaissée de ce point sur GG′ est l'axe radical X; et comme elle est aussi perpendiculaire sur gg' parallèle à GG′, elle passe par son milieu: c'est-à-dire que g et g' sont symétriques, relativement à X.

Il suit de là, d'après le cas particulier du théorème XI, que G, G′, transformés de g, g', sont conjugués relativement au cercle x transformé de X.

2° Pour établir que X est l'axe radical du cercle x et de chacun des cercles G, G′, il suffit de montrer que tout cercle Y, orthogonal à G et G′, l'est au cercle x. En effet, le cercle y, transformé de Y, est orthogonal au cercle G, puisque Y l'est au cercle G′, et il est orthogonal au cercle G′, puisque Y l'est à G. Donc il a son centre sur la droite X; par conséquent son transformé Y est orthogonal au cercle x, transformé de X.

Remarque. — De la seconde partie du théorème, on pourrait déduire la première, comme il suit. Le cercle x a son

centre sur GG′ et passe par A, donc il passe par le symétrique de A relativement à GG′. Or, on sait que ce symétrique est le transformé du centre du cercle Agg'; donc ce centre ω est sur X; par suite g et g' sont symétriques relativement à X, ce qui prouve que les points G, G′ sont conjugués relativement au cercle x.

On peut ajouter que le cercle x passe par le point harmoniquement opposé à A relativement à GG′; car ce point est le transformé du milieu de gg', lequel est sur X.

Théorème II. — *Lorsque les circonférences symétriquement inverses sont sécantes; si* B′, C′ *désignent leurs points d'intersection: 1° le cercle* AB′C′ *coïncide avec le cercle* x *transformé de* X; *2° le cercle* Agg′ *est le cercle d'Apollonius, relatif à l'angle* B′AC′, *dans le triangle* AB′C′; *3° les centres de similitude des deux cercles* G, G′ *sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à* B′C′ *dans le cercle* AB′C′; *4° si* M, m *sont deux points quelconques, transformés l'un de l'autre sur les circonférences* G, G′, *les isocycliques* m′ *de* M, M′ *de* m, *relativement à* A *et* B′C′, *sont les isogonaux de* m, *et de* M, *relativement au triangle* AB′C′; *5° si* ρ *et* ρ' *sont les rayons des cercles* G, G′, *on a*

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{Am'}{Am} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

1° B′ étant un point de chacun des deux cercles G, G′, son transformé appartient aux deux cercles G′ G: c'est donc le point C′. Par conséquent, le transformé de la droite B′C′ est le cercle AB′C′. Comme B′C′ est ici l'axe radical X des cercles G, G′, le cercle x, transformé de X, se confond avec le cercle AB′C′: de plus, les centres G, G′ sont conjugués relativement au triangle AB′C′.

2° g étant conjugué de A, relativement au cercle G′, on a, pour les points B′, C′ de ce cercle, $\frac{gB'}{AB'} = \frac{gC'}{AC'}$. Pour la même raison $\frac{g'B'}{AB'} = \frac{g'C'}{AC'}$; ce qui prouve que g et g' appartiennent au cercle qui a son centre sur B′C′ et qui passe par les pieds des deux bissectrices de l'angle B′AC′ dans le triangle AB′C′.

c'est-à-dire au cercle d'Apollonius; et, comme ce cercle passe aussi par A, il se confond avec le cercle Agg'.

3° Les points G et G′ étant conjugués relativement au cercle AB′C′, dont nous désignerons le centre par O′ et le rayon par R′, on a, pour tout point P de ce cercle, $\frac{PG}{PG'} = \frac{O'G}{R'}$.

Le point O′, centre du cercle AB′C′, a pour transformé le symétrique A′ de A. relativement à la droite B′C′ transformée de ce cercle; les triangles AO′G et AgA' sont semblables et donnent $\frac{GO'}{R'} = \frac{A'g}{Ag}$; g et g' étant symétriques relativement à X, c'est-à-dire relativement à B′C′, $A'g = Ag'$ et $\frac{O'G}{R'} = \frac{Ag'}{Ag} = \frac{AG}{AG'} = \frac{\rho}{\rho'}$. Donc $\frac{PG}{PG'} = \frac{\rho}{\rho'}$, ce qui montre que le cercle AB′C′ passe par les centres de similitude des cercles G, G′. Et comme GG′ passe par O′, les centres de similitude sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à B′C′ dans le cercle O′.

4° Observons que AB′, AC′ sont antiparallèles, relativement à l'angle A de ABC, puisque B′, C′ sont symétriquement inverses. Par conséquent, deux droites quelconques AM, Am antiparallèles dans l'angle BAC le sont relativement à l'angle B′AC′. En outre, comme AB′. AC′ = AB. AC, on voit que les points M, m, transformés l'un de l'autre relativement au triangle ABC, le sont aussi relativement au triangle AB′C′. De sorte qu'à ce point de vue, et pour les propriétés qui en résultent, on peut substituer l'un des triangles à l'autre. Donc l'isocyclique m' de M, relativement à A et B′C′, est l'isogonal de m relativement au triangle AB′C′. De même, l'isocyclique M′ de m est l'isogonal de M.

5° Quant à la relation $\frac{AM}{AM'} = \frac{Am'}{Am} = \frac{\rho}{\rho'}$, pour ne pas faire double emploi, nous renvoyons au § XXI, où elle est établie et donne lieu à quelques conséquences utiles.

Théorème III. — *Si plusieurs cercles* G, G_1, G_2,... *ont un même axe radical* X, *leurs transformés* G′, G_1' G_2',... *ont aussi un même axe radical* X′.

Il suffit de prouver que tout cercle Y′, orthogonal à G′ et G_1', l'est aussi à G_2'. Ce qui est évident puisque son transformé Y étant orthogonal à G et G_1 l'est à G_2.

Ce théorème comprend, comme cas particulier le 2° du théorème I. Il subsiste quel que soit le mode d'inversion.

Remarque. — Le cercle x transformé de l'axe radical X des cercles de la série G fait partie de la série des cercles G′, car X peut être considéré comme un des cercles de la série G. Et de même le cercle x', transformé de X′ appartient à la série des cercles G. Cette condition et la condition de passer par A déterminent complètement ces deux cercles x, x'.

Problème. — *Déterminer, sur un cercle donné* G, *deux points* M, m, *qui soient les transformés l'un de l'autre.*

Ces points sont à l'intersection du cercle G et de son transformé G′. Mais on peut les obtenir sans construire celui-ci. On prendra le transformé g du centre G et le conjugué g' de A, relativement au cercle G. D'après le théorème I, la perpendiculaire à gg', en son milieu, est l'axe radical X des cercles G, G′. Son intersection avec le cercle G donnera donc les points cherchés, s'ils existent.

Remarque. — Plus généralement, si l'on demande deux points M, m, symétriquement inverses et qui soient situés l'un sur un cercle donné G, l'autre sur un autre cercle donné G_1, on voit que M est l'intersection du cercle G et du transformé G_1' du cercle G_1. De là, s'il y a intersection, deux points M, et par suite deux points correspondants m.

Autre propriété. — Une dernière propriété que nous ne faisons qu'énoncer parce que la démonstration en est évidente, est que *si un quadrilatère* MNPQ *inscrit dans un cercle est harmonique, le quadrilatère* mnpq *dont les sommets sont les transformés des premiers est aussi harmonique.* Et plus généralement : si le rectangle de deux côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible est dans un certain rapport avec le rectangle des deux autres côtés ou des deux diagonales, le rapport est le même pour le quadrilatère formé par les transformés des sommets du premier quadrilatère.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX POINTS ISOGONAUX

Comme les transformés de deux points isogonaux sont isogonaux, toute propriété concernant ces points se double d'une autre propriété qu'on en déduit par transformation. C'est principalement là, et dans les propriétés des droites isogonales, que la méthode d'inversion symétrique se montre supérieure à l'inversion ordinaire.

XV. — *Questions préliminaires.*

M, M′ étant deux points isogonaux, nous désignerons par E, E′ la rencontre des antiparallèles AM, AM′ avec la circonférence ABC, et par D, D′ leurs rencontres avec BC. Les deux points E, E′ ont pour transformés D′, D. De sorte que, sur les antiparallèles, les sens AE, AD′ doivent être considérés comme tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs; et, de même, AE′, AD; ce qui fixe les signes relatifs des longueurs comptées sur ces antiparallèles. Il importe d'y avoir égard dans tout ce qui va suivre. Les longueurs AE et AE′, ou bien AD et AD′, sont aussi de même signe, sauf le cas où la corde EE′, parallèle à BC, a son extrémité sur l'arc déterminé, à l'opposé de BC, par une parallèle menée de A à BC.

Théorème. — *Si* M, M′ *sont deux points isogonaux*, m, m′ *leurs transformés, les droites* MM′, mm′ *considérées comme indéfinies, sont symétriques relativement au milieu* F *de la corde* EE′.

La relation qui caractérise deux points isogonaux quelconques M, M′, situés sur deux antiparallèles données AE, AE′, est

$$EM.E'M' = \text{const.} = AE.D'E' = AE'.DE = AE.AE' - bc.$$

La valeur de cette constante résulte de ce que D et A sont isogonaux; de même, D′ et A. Cette relation étant facile à établir, nous l'admettrons.

m, m' étant également isogonaux, on a donc

$$EM.E'M' = Em'.E'm,$$

d'où

$$\frac{EM}{E'm} = \frac{Em'}{E'M'} = \frac{Mm'}{mM'} = -\frac{AM}{AM'}.$$

Or, si μ et μ' sont les rencontres de MM′ avec les parallèles

menées par E à AE′ et par E′ à AE, on a

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{EM}{E\mu} = \frac{E'\mu'}{E'M'}.$$

De là résulte : $E\mu = -E'm$, $E'\mu' = -Em'$. Donc μ et m sont symétriques relativement au milieu F de EE′; de même μ' et m'; par conséquent $\mu\mu'$ ou MM′ est symétrique de mm', relativement à F.

En outre, cette propriété est caractérisque des points isogonaux, en ce sens que si M, M′, m, m' sont quatre points situés sur deux antiparallèles AE, AE′ de l'angle A, les deux derniers étant les transformés des deux premiers, et que MM′, mm' soient symétriques relativement à F, on peut affirmer que M et M′ sont isogonaux; et, par suite, m, m'. Renversons, en effet, la démonstration. De $E\mu = -E'm$, et de,

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{EM}{E\mu},$$

on conclut

$$\frac{EM}{E'm} = -\frac{AM}{AM'}$$

ou $$EM(AE'+E'M') = -(Am-AE')AM = AMAE'-bc.$$

ou $$EM.E'M' = AE.AE' - bc.$$

Donc M et M′ sont isogonaux.

Le point m' n'intervient pas dans la démonstration de cette réciproque. On peut l'énoncer ainsi : *Si* M *et* m *sont deux points symétriquement inverses, et* μ *la symétrique de* m *relativement à* F, *la droite* μM *rencontre* Am *au point* M′ *isogonal de* M.

Remarque. — Cette propriété *que les deux droites* MM′, mm′ *sont symétriques relativement à* F, se rattache à cette autre plus générale et qu'on peut établir par le calcul ou par des considérations d'homographie *que si les couples de points isogonaux* M, M′; m, m′, *dont les deux derniers sont les transformés des deux premiers, se déplacent sur les antiparallèles fixes* AE, AE′, *les deux droites parallèles* MM′, mm′ *enveloppent une même conique qui a pour centre le point* F, *milieu de* EE′. Cette conique est tangente à AE et AE′ en D, D′. *Les cercles* AMM′, Amm′, *tangents en* A, *ont donc aussi une même enveloppe, laquelle est la courbe symétriquement inverse de cette conique.*

Par application de la méthode d'inversion, on obtient les théorèmes suivants :

Théorèmes corrélatifs du précédent : 1. *Si* G *est le point où la symédiane issue de* A, *dans le triangle* ADD′, *rencontre la circonférence* ADD′, *les circonférences* AMM′, Amm′ *divisent* AG *harmoniquement.*

2. *Si* M, M′ *sont deux points isogonaux donnés sur* AD, AD′ *et* P *un point variable de la circonférence* AMM′, *le lieu du point* p, *harmoniquement opposé à* P, *relativement à* AG, *est la circonférence* Amm′, *où* m, m′ *sont les transformés de* M, M′.

Le premier de ces théorèmes résulte, par inversion, de ce que la partie de AF, comprise entre MM′, *mm′* dans la question directe, est divisée en F en deux parties égales.

Le second résulte du fait plus général que la droite MM′ de la question directe est le lieu du symétrique d'un point variable de *mm′* relativement à F.

On se rend compte de ces deux transformations, en observant que la symédiane AG, de ADD′, est la transformée de AF ; et G le transformé de F.

Le théorème corrélatif de la propriété réciproque est celui-ci :

Si M, m *sont deux points symétriquement inverses, situés sur deux antiparallèles données* AD, AD′, *et que* μ *soit le point harmoniquement opposé à l'un d'eux* M *relativement à* AG, *la circonférence* Amμ *coupe* AD *au point* m′, *isogonal de* m.

XVI. Problème. — *Déterminer, sur deux antiparallèles données* ADE, AD′E′, *deux points isogonaux* M, M′, *qui soient transformés l'un de l'autre.*

Le transformé de M′ est l'isocyclique de l'isogonal de M′, c'est-à-dire l'isocyclique de M ; donc M est son propre isocyclique ; par conséquent AM est tangente à la circonférence BCM. Ceci prouve d'abord que le problème n'a de solution que si AD, AD′ sont extérieures à l'angle BAC, et que la solution consiste à faire passer par B et C une circonférence tangente à AD, ce qui revient à porter sur DA dans les deux sens, à partir de P, une longueur égale à la moyenne proportionnelle entre DB et DC ou entre DE et DA. On a ainsi deux points

M, M_1. Et, en prenant sur AD′ les longueurs

$$AM' = \frac{bc}{AM}, \qquad AM'_1 = \frac{bc}{AM_1},$$

dans le sens AD′ ou en sens contraire selon que AM ou AM_1 a le sens AE ou le sens contraire, on aura les transformés de M et M_1. Et ces transformés seront les isogonaux de M ou M_1, car M′, par exemple, étant le transformé de M, est l'isogonal de l'isocyclique de M, c'est-à-dire l'isogonal de M.

D'ailleurs les points M′, M'_1 peuvent s'obtenir directement, au moyen des deux circonférences qui passent par B et C et sont tangentes à AD′.

Et, enfin, on peut remarquer aussi que les droites MM'_1, M_1M' sont parallèles à BC. Car DE, D′E′; DA, D′A′ étant proportionnels à AB, AC, il est de même de DM et DM'_1, de DM_1 et DM′.

Remarque 1. — Comme les droites MM′, *mm′* du théorème de ce paragraphe sont ici confondues, les droites MM′ et la droite $M_1M'_1$, de la question actuelle, passent par F, milieu de EE′. Ce sont donc les deux asymptotes de la conique mentionnée plus haut.

Remarque 2. — La transformation par inversion symétrique, appliquée à ce problème, ne fait que le reproduire. Mais on aurait pu lui donner d'autres formes pour lesquelles il n'en serait pas ainsi. On aurait pu l'énoncer en demandant de *tracer par* F, *entre* AD, AD′, *une droite* MM′ *telle que* M *et* M′ *fussent isogonaux, ou fussent symétriquement inverses;* et alors, par transformation, on aurait eu cette question, *faire passer par* A *et* G *une circonférence qui coupe* AD, AD′ *en deux points isogonaux ou en deux points symétriquement inverses.*

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(Suite, voir p. 211.*)*

183. — *Soient* K, I, I′, I″, I‴, A′, B′, C′, *le point de Lemoine d'un triangle* ABC, *les centres des cercles touchant les côtés et les milieux des côtés; démontrer que les droites :* I′A′, I″B′, I‴C′, KI, *se coupent au même point.*

Les équations des trois premières de ces droites sont :

$$(b-c)x+by-cz=0,$$
$$-ax+(c-a)y+cz=0,$$
$$ax-by+(a-b)z=0,$$

elles se coupent au point dont les coordonnées vérifient les égalités

$$\frac{x}{p-a}=\frac{y}{p-b}=\frac{z}{p-c}$$

lequel est manifestement situé sur KI.

Ce point dont les coordonnées barycentriques sont :

$$\frac{\alpha}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\beta}{\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{\gamma}{\cos^2\frac{C}{2}},$$

est tel que $xz+yz+xy$ est maximum.

184. — *Les parallèles à* OI *sont telles que la somme algébrique des cosinus des angles qu'elles font avec les trois côtés du triangle* ABC *est nulle.*

L'équation de OI est :

$$\sum x(\cos B-\cos C)=0.$$

Le cosinus de l'angle fait par cette droite avec BC est proportionnel à $\cos B-\cos C-[(\cos C-\cos A)\cos C+(\cos A-\cos B)\cos B]$. Pour les angles formés avec AB, AC, on aurait des formules analogues. Donc la somme des cosinus est nulle.

185. — *La droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle, et ses parallèles, forment avec les trois côtés du triangle des angles sont la somme algébrique des sinus est nulle.*

Soient α, β, γ, ces angles,

$$x+y+z=0$$

étant l'équation de la droite considérée, les formules générales donnent :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin B-\sin C}=\frac{\sin\beta}{\sin C-\sin A}=\frac{\sin\gamma}{\sin A-\sin B};$$

d'où

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0.$$

186. — *Soient* M_a, M_b, M_c *les cercles de Mackay du triangle* ABC, *la polaire de* A *par rapport à* M_a, *la polaire de* B *par rapport à* M_b, *la polaire de* C, *par rapport à* M_c, *sont trois droites qui concourent au centre de gravité* G *de* ABC.

L'équation de M_a est :

$$\sum\alpha^2(a^2-b^2-c^2)+\sum\beta\gamma(3a^2-b^2-c)^2=0,$$

donc l'équation de la polaire de A est :

$$\gamma(3b^2-a^2-c^2)+\beta(3c^2-b^2-a^2)+2\alpha(a^2-b^2-c^2)=0,$$

qui est vérifiée par $\alpha=\beta=\gamma$.

187. — *Le lieu des points* M *tels que* μ_2 *(inverse de la droite harmoniquement associée à* M*) fasse, avec les côtés du triangle, des angles dont la somme des sinus est nulle est la droite* KI.

On trouve aisément, pour équation du lieu :

$$\Sigma x(b - c) = 0.$$

188. — *Lieu des points* M *tels que* μ_2 *(transversale inverse de la droite harmoniquement associée à* M*) fasse, avec les côtés du triangle de référence, des angles dont la somme algébrique des cosinus soit nulle.*

On trouve aisément

$$\Sigma x(1 - \cos B - \cos C) = 0,$$

équation d'une droite qui passe par le point de Lemoine.

189. — *Soit* $A_1B_1C_1$, *le triangle pédal du centre du cercle circonscrit* O. *On projette* A_1 *en* A_b, A_c *sur les côtés de l'angle* A : *les droites* $A_b A_c$, *et les analogues* $B_a B_c$, $C_a C_b$ *forment un triangle* $A_2B_2C_2$, *semblable à* ABC ; *démontrer que les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *sont concourantes.*

A_bA_c est parallèle à BC. Soit x_1 la distance de ces droites, y_1, z_1, les distances analogues. On trouve :

$$x_1 = \frac{2S \cos B \cos C}{R(\sin 2B + \sin 2C)},$$

$$y_1 = \frac{2S \cos A \cos C}{R(\sin 2A + \sin 2C)},$$

$$z_1 = \frac{2S \cos A \cos B}{R(\sin 2A + \sin 2B)}.$$

Les droites AA_2, BB_2 CC_2, ont pour équations :

$$\frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}, \qquad \frac{z}{z_1} = \frac{x}{x_1}, \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}.$$

Elles se coupent au point dont les coordonnées barycentriques sont :
$\alpha \cos A \cos (B - C) = \beta \cos B \cos (C - A) = \gamma \cos C \cos (A - B)$.
Le rapport de similitude de $A_2B_2C_2$ et ABC est :

$$1 - \sum \frac{\cos B \cos C}{\cos (B - C)}.$$

190. — *Soient* Ω, Ω′ *les points de Brocard, du triangle* ABC; A_1, B_1, C_1, *les centres des cercles* AΩΩ′, BΩΩ′, CΩΩ′ : *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent au point de Tarry de* ABC.

L'équation du cercle AΩΩ′ est

$$(a^4 - b^2c^2) \sum a^2\beta\gamma - a^2(\alpha + \beta + \gamma)[c^2\beta(a^2 - b^2) + b^2\gamma(a^2 - c^2)] = 0$$

d'où, pour les coordonnées du centre :

$$\gamma b^2c^2(a^2 - b^2) + \beta b^2c^2(a^2 - c^2)$$
$$= -2\beta a^2c^2(a^2 - b^2) + \gamma a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + \alpha b^2c^2(a^2 - c^2)$$
$$= -2\gamma a^2b^2(a^2 - c^2) + \beta(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)a^2 + \alpha b^2c^2(a^2 - b^2).$$

L'élimination de α donne l'équation de AA_1 :

$$\gamma[a^8 - a^6c^2 + a^4b^2(b^2 - 2c^2) + a^2b^2c^4 + b^4c^2(c^2 - b^2)],$$
$$= \beta[a^8 - a^6b^2 + a^4c^2(c^2 - 2b^2) + a^2b^4c^2 + b^2c^4(b^2 - c^2)]$$

qu'on peut écrire, après suppression du facteur $a^4 - b^2c^2$:

$$\gamma[a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2)] = \beta[a^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2)].$$

On a des équations analogues pour BB_1, CC_1.

Ces équations montrent que ces droites se coupent au point déterminé par les relations :

$$\alpha[b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)] = \beta[a^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2)] = \gamma[a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2)]$$

lequel est le point de Tarry.

BIBLIOGRAPHIE

Nomographie. — Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. *Règles pratiques. Exemples d'application* par M. Maurice D'OCAGNE, ingénieur des Ponts et Chaussées. — In-8 avec nombreuses fig. dans le texte et 8 pl. ; 1891 . . 3fr.50c.

Il y a longtemps qu'on a songé pour la première fois, sur divers exemples particuliers, à recourir à la représentation graphique des lois à plusieurs variables, en vue de supprimer la nécessité du calcul numérique. Mais, de même que les procédés spéciaux du trait de charpente, du trait de stéréotomie. etc., ont précédé l'éclosion de la Géométrie descriptive, de même ici, il semble que les auteurs n'aient jamais eu en vue que certaines applications déterminées, sans s'occuper de rechercher si les solutions, d'ailleurs fort ingénieuses, auxquelles ils arrivaient ainsi, étaient susceptibles de dériver d'une méthode générale. C'est cette méthode générale que l'auteur s'est proposé de constituer et dont, sous le titre de *Nomographie*, il expose les principes dans le présent ouvrage.

N'oubliant pas qu'il s'adresse avant tout à des gens techniques (ingénieurs, officiers des armées de terre et de mer, financiers, etc.), il s'est efforcé de rendre son exposé aussi clair et aussi concis que possible, en le complétant par des applications nombreuses et variées, puisées dans la pratique courante des diverses spécialités où le calcul numérique est d'une importance primordiale.

Les avantages de la Nomographie sont de même ordre que ceux de la Géométrie descriptive. D'une part, en s'assimilant les principes bien élémentaires, bien faciles à pénétrer qui lui servent de base, on se rend maître, du même coup, de tous les procédés particuliers de représentation graphique des équations, imaginés en vue d'applications particulières. A cet égard, il est intéressant de voir avec quelle simplicité les procédés connus de MM. Lalanne, Lallemand, d'Ocagne, etc.. applicables les uns et les autres à des genres spéciaux d'équations et tirés, par leurs auteurs, de points de départ tout différents, découlent de la méthode générale.

D'autre part, les principes de la Nomographie, comme ceux de la Géométrie descriptive, permettent, par une marche systématique, de multi-

plier les applications au fur et à mesure des besoins de la pratique, sans qu'il y ait lieu pour cela de faire de nouveaux efforts d'imagination.

Aussi peut-on prévoir que le livre de M. d'Ocagne contribuera à généraliser l'emploi des travaux graphiques de calcul ou *abaques*, sources d'une économie de temps considérable qu'ont pu déjà faire apprécier, pour des applications particulières, les abaques de M. Lalanne (déblai et remblai), de M. Lallemand (service de nivellement général de la France), etc.

Indépendamment des nombreuses figures qui illustrent le texte, l'ouvrage renferme huit planches donnant des abaques dessinés avec assez de soin pous pouvoir eux-mêmes se prêter à des calculs pratiques. Les explications fournies sur leur construction sont de nature à éviter tout tâtonnement à ceux qui, en vue de leurs propres besoins, auront à mettre en œuvre les principes formulés dans le livre.

QUESTIONS 374 ET 375

Solution par M. B. Sollertinsky.

374. — *Sur les trois côtés d'un triangle* ABC, *on prend trois segments quelconques* DD′, EE′, FF′. *Démontrer que les axes radicaux des circonférences circonscrites à* AEF, AE′F′; BFD, BF′D′; CDE, CD′E′ *sont trois droites concourantes. Deux des segments étant donnés, déterminer le troisième par la condition que le point de concours soit commun aux circonférences.* (E. Bernès.)

375. — *Trois points* D, E, F *se déplacent uniformément sur les trois côtés d'un triangle* ABC; *faire voir que le point* M *commun aux trois circonférences circonscrites à* AEF, BFD, CDE *décrit une circonférence. Dans quel cas particulier le point* M *est-il fixe?* (E. Bernès.)

On peut considérer DD″, EE′, FF′, comme les segments homologues des trois figures F_1, F_2, F_3 directement semblables. Les seconds points communs S_1, S_2, S_3 des circonférences AEF, AE′F′ etc. sont alors les points doubles de ces figures. Mais (*G. Tarry*. Propriétés générales de trois figures semblables. *Mathesis*, t. II, p. 73). « *Dans trois figures semblables, tous les triangles formés par trois droites homologues quelconques sont homologiques à un triangle fixe (le triangle de similitude)*...

Les segments EE′, FF′ étant donnés, on trouve S_1, et les points D, D′ sont les intersections de BC avec les cordes BFS_1, $BF'S_1$. (*Ibid.* p. 75) on lit: « *Si trois points* M_1, M_2, M_3 *se déplacent sur les côtés d'un triangle* $D_1D_2D_3$ *avec des vitesses uniformes,*

les circonférences $D_1M_2M_3$, $D_2M_3M_1$, $D_3M_1M_2$... *se coupent en un point* K′ *qui décrit la circonférence* »...

On sait aussi que si le triangle DEF reste semblable à lui-même, le point M est fixe (*Townsend*. Voir *A Sequel to Euclid by Casey*, 1888, p. 188).

Note (*). — M. G. Tarry a énoncé dans *Mathesis*, t. II, p. 75, le théorème suivant (nous adoptons les notations de M. Bernès) :

Si trois points D, E, F, se déplacent uniformément sur les trois côtés d'un triangle ABC, les circonférences AEF, BFD, CDE, passent chacune par un point fixe S_a, S_b, en S_c, et se coupent en un point M qui décrit la circonférence S_a, S_b, S_c.

Les points S_a, S_b, S_c sont les centres de similitude de trois figures semblables construites sur DD′, EE′, FF′, où l'on désigne par (D, E, F) (D′, E′, F′) des positions simultanées des trois mobiles. Ces points coïncident, et le point M reste immobile, si les vitesses des mobiles sont proportionnelles aux distances des côtés du triangle ABC au point d'intersection des circonférences AEF, BFD, CDE. Dans ce cas, le triangle qui a pour sommets trois positions simultanées des mobiles, est d'espèce constante. La question 374 peut se ramener à la question 375.

QUESTIONS 371 ET 388

Solution par M. B. Sollertinsky.

371 (**). — *Par chacun des sommets du triangle* ABC, *on mène des perpendiculaires aux deux côtés qui s'y rencontrent. On forme ainsi trois parallélogrammes ayant, chacun, une diagonale extérieure au sommet correspondant du triangle. Démontrer :*

(*) Cette note est de M. Neuberg.

M. Sollertinsky nous a fait aussi observer que les questions 374, 375 pouvaient être rapprochées de celles que M. Tarry a données (*loc. cit.*).

(**) Comme l'indique une Note de M. Vigarié (*J. E.* 1885, p. 127), la première partie de cette proposition avait été rencontrée déjà par M. E. Lemoine (Voyez *Nouvelles Annales*, 1873, p. 366). La seconde partie a été indiquée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 28).

Voir également dans la *Nouvelle correspondance mathématique*, 1877, t. III, p. 188; un article de M. H. Brocard.

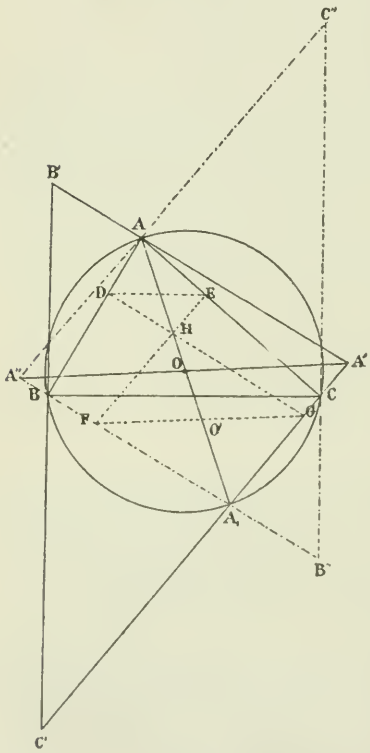
1° Que ces trois diagonales passent par le centre du cercle circonscrit à ABC ;

2° Qu'elles sont respectivement perpendiculaires aux trois symédianes du triangle.

Corollaire. — *Les points où elles rencontrent les symédianes sont les sommets du second triangle de Brocard.*

(d'Ocagne.)

388. — DE *étant une parallèle quelconque à* BC, *entre* AB *et* AC, F *la rencontre des perpendiculaires à* AC, *en* E *et à* AB, *en* B; G *la rencontre des perpendiculaires à* AB *en* D, *et à* AC, *en* C; *démontrer 1° que* FG *est perpendiculaire à la symédiane issue de* A; *2° que la distance du centre* O *de la circonférence* ABC *à la droite* FG, *comptée sur le diamètre* AO, *est égale au rayon du cercle* ADE. (Bernès.)



371. — Les sommets A, A_1 du parallélogramme $AA'A_1A''$ sont, les extrémités d'un diamètre du cercle ABC. Par suite : 1° le milieu de $A'A''$ est le centre O du cercle ABC.

Les triangles $A'B'C'$, ABC ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, on a

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ACB} = \widehat{AA_1A'},$$

donc les droites AA_1, $B'C'$ sont antiparallèles dans l'angle $B'A'C'$. Ainsi, 2° $A'A''$, comme la symédiane du triangle $A'B'C'$, est perpendiculaire sur la symédiane correspondante du triangle ABC.

On obtient le corollaire, en observant que les sommets du

second triangle de Brocard sont les projections du centre O sur les symédianes.

Remarque. — *Le centre* O *est le point de Lemoine et le cercle* ABC *est le second cercle de Lemoine des triangles égaux* A'B'C', A''B''C''.

388. — Les droites EF, DG se rencontrant, en H, sur le diamètre AA_1, les parallélogrammes HGA_1F, $AA'A_1A''$ sont homothétiques; par suite, GF', A'A'' sont paralléles.

Enfin, si FG coupe AA_1 en O', on a

$$OO' = OA_1 - O'A_1 = \frac{AA_1 - HA_1}{2} = \frac{AH}{2},$$

mais AH est le diamètre du cercle ADE, etc...

Nota. — Nous avons reçu des solutions de la Question 371 de MM. E. Vigarié et Philastre, et des solutions de la Question 388, de Mme Ve F. Prime, à Bruxelles et M. Svéchnicoff, à Troïtzk (Russie).

QUESTION 372

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Soient BC, CA, AB *les directions positives des côtés d'un triangle* ABC. *Par les sommets, on mène des droites* AP, BQ, CR *faisant, avec ces directions positives, un même angle* α.

Les droites considérées forment un triangle A'B'C'.

Démontrer :

1° Que le centre du cercle circonscrit à A'B'C', *coïncide avec l'orthocentre de* ABC.

2° Que tout point remarquable de A'B'C' *décrit une circonférence.*

Toutes ces circonférences passent par un même point, l'orthocentre de ABC.

Elles constituent un réseau de circonférences remarquables relativement au triangle ABC. (G. L.)

Soit H l'orthocentre de ABD. On obtient les droites AP, BQ, CR en tournant les hauteurs AH, BH, CH d'un même angle

$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et dans le même sens. Par suite, les sommets A′B′C′ décrivent les cercles BHC, CHA, AHB, et les triangles ABC, A′B′C′ restent toujours directement semblables.

1° Il en résulte que H est le centre de similitude de tous les triangles A′B′C′; pour $\alpha = 0$, H est le centre du cercle A′B′C′.

2° Soit S un point remarquable du triangle A′B′C′. Le triangle HA′S restant semblable à lui-même, les points A′, S décrivent deux figures semblables ayant leur point double en H. Donc S décrit un cercle passant par H.

Généralisation. — *Soient* M, M′ *deux points inverses par rapport au triangle* ABC. *On fait tourner les droites* AM, BM, CM *avec la même vitesse angulaire et dans le même sens; les positions correspondantes de ces droites forment un triangle* A′B′C′ *circonscrit à* ABC:

1° Ce triangle A′B′C′ *est toujours semblable au triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$ *qui a pour sommets les projections de* M′ *sur les côtés de* ABC.

2° Le point M, *dans le triangle* A′B′C′, *est l'homologue du point* μ' *inverse de* M′ *par rapport au triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$.

Par suite : le centre M *du cercle circonscrit à* ABC *est le centre du cercle inscrit (ou ex-inscrit) à* A′B′C′; *le centre de gravité de* ABC *est le point de Lemoine de* ABC, *le centre du cercle inscrit ou ex-inscrit de* ABC *est l'orthocentre de* A′B′C′; *le centre isodynamique de* ABC *est le centre isogone de* A′B′C′, *etc.*

3° Tout point de A′B′C′ *décrit une circonférence passant en* M.

QUESTION 376

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Les bissectrices intérieures et extérieures des angles d'un parallélogramme comprennent entre elles trente-six rectangles, dont six peuvent être groupés deux à deux, ainsi qu'il suit : 1° celui des bissectrices des deux angles opposés, et celui des bissectrices des deux autres angles ; 2° le rectangle que forment les bissectrices

d'un angle avec celles de l'un des angles non opposés, et celui qu'elles forment avec les bissectrices de l'autre angle non opposé; 3° le rectangle des bissectrices intérieures, et celui des bissectrices extérieures.

On demande de démontrer, sans calcul, les propriétés suivantes :

a) *Les deux rectangles du premier groupe sont équivalents :*

b) *La moyenne proportionnelle entre les aires des rectangles du deuxième groupe est moitié de l'aire du parallélogramme.*

c) *Les diagonales des rectangles du troisième groupe sont, respectivement, égales à la différence et à la somme de deux côtés adjacents du parallélogramme.*

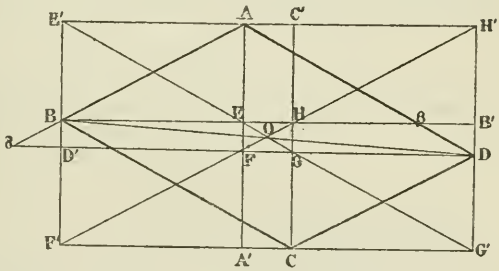
d) *Les aires de ces mêmes rectangles ont : 1° pour demi-différence l'aire du parallélogramme; 2° pour moyenne arithmétique, la somme des aires des rectangles du deuxième groupe; 3° pour moyenne proportionnelle, l'aire d'un rectangle du premier groupe.*

(A. Tissot.)

a) Dans le rectangle AEBE′ on a

$$\widehat{AEE'} = \widehat{BAE} = \widehat{EAD}.$$

Par suite, les quatre points E′, E, G, G′ sont situés sur la parallèle à BC, menée par le centre O du parallélogramme donné ABCD.



De même, F′FOHH′ est la droite parallèle à AB.

De là, les rectangles AC′HE et HB′DG, A′CGF et FD′BE étant équivalents (*Euclide*, I, 43), les rectangles du premier groupe AA′ CC′ et BB′DD′ le sont aussi.

b) Les rectangles du deuxième groupe AEBE, AFDH′, et les triangles ABβ, ADδ sont respectivement équivalents ; mais la moitié ABD du parallélogramme est la moyenne proportionnelle entre ces triangles, parce qu'on a

$$\frac{AB\beta}{ABD} = \left(\frac{A\beta}{AD} = \frac{AB}{A\delta}\right) = \frac{ABD}{AD\delta}.$$

c) E′E = AB, comme diagonales d'un rectangle, et

$$EG' = BC,$$

comme les côtés opposés d'un parallélogramme. On a donc

$$EG = BC - AB; \qquad E'G' = BC + AB.$$

d) En désignant les aires ABCD, EFGH, E′F′G′H′ par s, σ, σ', on a

$$\sigma+\sigma'=AEBE'+AFDH'+DGCG'+BHCF'=2(AEBE'+AFDH').$$

Mais

$$AEBE' + AFDH' = (ABE' + DG'C) + (ADH' + BCF') = \sigma' - s.$$

Par suite,

$$(1) \qquad s = \frac{\sigma' - \sigma}{2};$$

$$(2) \qquad AEBE' + AFDH = \frac{\sigma + \sigma'}{2}.$$

On a

$$E'OH' : E'OH = E'OH : EOH,$$

mais

$$4E'OH' = \sigma'; \; 4E'OH = 4(AHE + HOE) = AA'CC'; \; 4EOH = \sigma.$$

et finalement

$$(3) \qquad AA'CC' = \sqrt{\sigma\sigma'}.$$

QUESTION 378

Solution par M. Youssoufian, professeur à l'école impériale Milkié (Constantinople).

Dans tout triangle rectiligne, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p-a} & \cos A & 1 \\ \frac{1}{p-b} & \cos B & 1 \\ \frac{1}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(G. L.)}$$

1. — La relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ donne

$$\cos A - 1 = \frac{-(p-b)(p-c)}{2bc};$$

de même

$$\cos B - 1 = \frac{-(p-a)(p-c)}{2ac} \quad \text{et} \quad \cos C - 1 = \frac{-(p-a)(p-b)}{2ab}.$$

On peut donc écrire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-(p-b)(p-c)}{2bc} & \cos A - 1 & 1 \\ \dfrac{-(p-a)(p-c)}{2ac} & \cos B - 1 & 1 \\ \dfrac{-(p-a)(p-b)}{2ab} & \cos C - 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(p-b)(p-c)}{2bc} & \cos A & 1 \\ \dfrac{(p-a)(p-c)}{2ac} & \cos B & 1 \\ \dfrac{(p-a)(p-b)}{2ac} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant la première colonne par $\dfrac{2abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$, on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a}{p-a} & \cos A & 1 \\ \dfrac{b}{p-b} & \cos B & 1 \\ \dfrac{c}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{p-a} & \cos A & 1 \\ \dfrac{1}{p-b} & \cos B & 1 \\ \dfrac{1}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on trouve en ajoutant les éléments de la troisième colonne à ceux de la première et en simplifiant.

2. *Autrement* (*). — Si ρ est le rayon du cercle inscrit, le déterminant

(*) Cette solution est de M. Sollertinsky.

$$\Delta = \sum \frac{\cos B - \cos C}{p - a} = \frac{1}{\rho} \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} (\cos B - \cos C),$$

mais
$$\cos B - \cos C = -2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2}$$
$$= -2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right).$$

Donc
$$\Delta = -\frac{2}{\rho} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) = 0.$$

3 (**). — Désignant ce déterminant par Δ et multipliant les éléments de la première colonne par r, on a :

$$\Delta r = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \frac{A}{2} & 1 + \cos A & 1 \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} & 1 + \cos B & 1 \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} & 1 + \cos C & 1 \end{vmatrix},$$

et, en développant,
$$\Delta r = \sum 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(\cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} \right)$$
$$= \sum 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2},$$
$$\Delta r = \sum (\sin C - \sin B) = 0;$$
d'où
$$\Delta = 0.$$

Nota. — Nous avons reçu une autre solution de M. Théodore Vladimirescu, à Rômnicu-Valcea (Roumanie).

QUESTION 294

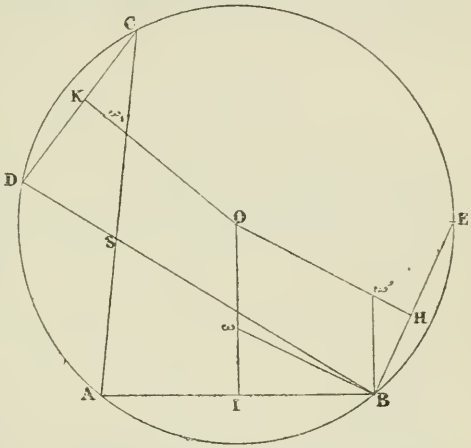
Solution par M. Pexer, à Besançon.

On donne un cercle de centre O, *une corde fixe* AB, *et une corde* CD *de longueur constante, mais de position variable. On*

(**) Cette troisième solution est de M. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe.

trace AC *et* BD *qui se coupent en* S. *Démontrer que le lieu du point* S *et celui du centre du cercle circonscrit au triangle* SCD *sont deux figures égales.*

La somme des arcs AB et CD est invariable; l'angle $\widehat{ASB}$ est constant : le lieu de S est par conséquent un arc capable de cet angle, décrit sur AB, comme corde. Si l'on prend l'arc BE = CD, le centre de ce segment sera en un point ω, intersection des droites OI et Bω, respectivement perpendiculaires aux droites AB et BE; de plus, son rayon est ωB.



Le cercle circonscrit au triangle CSD coïncide avec le segment capable du même angle S décrit sur DC comme corde. Construisons ce segment capable sur la corde BE. Il suffit de mener OH à Bω′ respectivement perpendiculaires à BE et à BA, le centre est ω′, le rayon Bω′. En prenant, sur la perpendiculaire OK à CD, une longueur $O\omega_1$ égale à Oω′, ω_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle SCD.

Le lieu de ω_1 est la circonférence décrite, de O comme centre, avec un rayon égal à Oω′. La figure Bω′Oω est un parallélogramme, car les côtés opposés sont perpendiculaires à une même droite, donc Oω′ = Bω ; ce qui démontre la proposition.

Les résultats précédents subsistent pour S′ point de rencontre de AD et BC; l'angle constant aurait pour mesure la différence des arcs AB et CD.

Nota. — Solution analogue, par M. M. Ledoux, élève au lycée de Limoges; solution trigonométrique, par M. Baudran, lycée de Rouen.

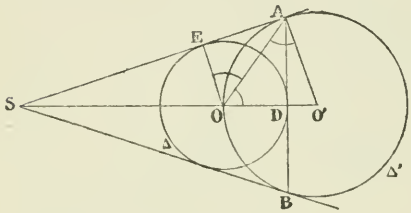
QUESTION 383

Solution par M. Lavieuville, professeur au Collège de Dieppe.

On considère deux circonférences Δ, Δ′ *telles que l'une d'entre elles,* Δ′, *passe par le centre de* Δ. *Les tangentes communes à ces circonférences touchent* Δ′ *aux points* A *et* B. *Démontrer que* AB *est tangente à* Δ. (G. L.)

La droite AB étant perpendiculaire à OO′, si l'on désigne par R et R′ les rayons de Δ et Δ′, il suffit de démontrer que

$$OD = R.$$



On a $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{R'}{R}$,

$$\frac{SO'}{SO' - SO} = \frac{R'}{R' - R};$$

d'où $SO' = \dfrac{R'^2}{R' - R}$;

on a aussi

$$R'^2 = SO' \times O'D.$$

De cette égalité, on tire, en remplaçant SO′ par sa valeur,

$$O'D = R' - R.$$

Par suite $OD = R$,

Autrement (*) : En supposant que la tangente commune AS touche Δ en E et que le rayon OO′ de Δ′ rencontre Δ en D.

Le triangle isoscèle OO′A donne

$$\widehat{AOO'} = \widehat{O'AO},$$

d'ailleurs $\widehat{O'AO} = AOE$, comme alternes internes.

Les triangles AOD, AOE sont donc égaux; par suite, AB est tangente à Δ.

On peut observer que AB est la polaire du centre de similitude S des circonférences Δ, Δ′. La propriété en question s'applique, bien entendu, au second centre de similitude S′; la polaire de ce point est tangente à Δ.

Nota. — Solutions diverses par Mme Ve F. Prime, à Bruxelles, et par MM. W. Greenstreet M. A; Baudran, élève au lycée de Rouen; Svéchnicoff, à Troïtzk (Russie); Grolleau, maître répétiteur au lycée de Marseille.

(*) Cette solution est de M. B. Sollertinsky.

QUESTIONS PROPOSÉES

412. — Soient, a, b, c les côtés d'un triangle quelconque. Démontrer que l'on a, quel que soit n,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^{n-2}b^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2} + c^{n-2}a^{n-2}) > 2\,(a^n + b^n + c^n)\,(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}).$$

(L. Bénézech.)

413. — Les portions l_1, l_2, l_3, l_4, comprises à l'intérieur du cercle circonscrit, les droites qui joignent les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 d'un tétraèdre à son centre de gravité, vérifient la relation

$$\sum \frac{(d_{12} + d_{13} + d_{14})^2}{l_1^2} = 4\sum d_{12}$$

d_{12}, d_{13}, ... ayant leur signification ordinaire.

(L. Bénézech.)

414. Théorème (*). — Si, au double d'un nombre triangulaire (**), on ajoute un carré, on obtient la somme de deux nombres triangulaires. *(E. Catalan.)*

415. — On a,

$$1 \cdot \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \cdot 1 = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \text{(***)}.$$

(E. Catalan.)

416. — D'un point P, intérieur à un triangle ABC, on mène les parallèles DPE, FPG, HPK, aux côtés.

1° Trouver la relation qui existe entre les segments AG, AH, BD, BK, CF, CE.

2° Dans quelle partie du triangle ABC le point P doit-il être situé, pour que l'on puisse construire un triangle XYZ, avec les droites DE, GF, HK, prises comme côtés?

3° Ce triangle XYZ étant supposé possible, soient L, M, N les projections de P sur YZ, ZX, XY, respectivement.

Démontrer que les droites LX, MY, NZ sont concourantes.

(E. Catalan.)

(*) Presque évident.

(**) Les nombres triangulaires sont : 1, 3, 6, 10, ... $\frac{n(n+1)}{2}$, ...

(***) Cette identité est, à peu près, évidente. A-t-elle été remarquée?

417. — L'orthocentre n'est jamais sur le cercle de Brocard, sauf dans le cas limite qui correspond au triangle équilatéral.

(F. Lemoine.)

418. — On considère la circonférence qui passe par le sommet A et par le point de Lemoine d'un triangle ABC, et qui coupe orthogonalement le cercle circonscrit. Démontrer qu'on a, pour tout point M, de cette ligne :

$$\frac{a^2.\overline{MA}^2}{b^2.\overline{MB}^2 - c^2.\overline{MC}^2} = \frac{m_a^2}{m_b^2 - m_c^2}$$

(a, b, c désignant les côtés du triangle; m_a, m_b, m_c, les médianes.) *(L. Benezech.)*

ERRATA

Page 170. Ligne 2 : *au lieu de* par rapport à $\mathfrak{M}(p)$. *lisez* par rapport à p.
au lieu de $F = p + f$, *lisez* $F = \mathfrak{M}(p) + f$.

Page 173. Ligne 7, en remontant :
au lieu de $p + \mathfrak{M}(p) - 1$, *lisez* $\mathfrak{M}(p) + p - 1$.

Page 174, dernière ligne : *au lieu de* $k + 3$, *lisez* $4k + 3$.

Page 177. Ligne 2, en remontant : *au lieu de* m et n *lire* M et N.

Page 179. Lignes 13 et 21, en remontant : *après* équiangle *ajouter* (en signes contraires).

Page 199. Ligne 4 : *au lieu de* sur *lire* relativement à.
Ligne 5, en remontant : *Supprimer* passant par A.

Page 200. Ligne 6 : *au lieu de* conjugués de la droite *lire* conjugués des points de la droite.
Ligne 14 : *au lieu de* point *lire* le point.

Page 201. Ligne 9 : *au lieu de* antiparallèles *lire* isogonales.

Page 207. Ligne 10, en remontant : *au lieu de* $\frac{AM}{AF}$ *lire* $\frac{AM}{AP}$.
Ligne 13, en remontant : *au lieu de* quelconque *lire* variable.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18910-8-91.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DU CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES (*)

Par M. **Louis Bénézech.**

I. — Soit A_5 un point dont les coordonnées barycentriques, par rapport au tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$, sont, α_1, α_2, α_3, α_4. Considérons six points quelconques de l'espace, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. D'après une formule fondamentale de la théorie du centre des distances proportionnelles, on peut écrire les six équations :

$$\alpha_1.\overline{M_1A_1}^2+\alpha_2.\overline{M_1A_2}^2+\alpha_3.\overline{M_1A_3}^2+\alpha_4.\overline{M_1A_4}^2-V.\overline{M_1A_5}^2-\sum\alpha_1.\overline{A_5A_1}^2=0;$$

$$\alpha_1.\overline{M_2A_1}^2+\alpha_2.\overline{M_2A_2}^2+\alpha_3.\overline{M_2A_3}^2+\alpha_4.\overline{M_2A_4}^2-V.\overline{M_2A_5}^2-\sum\alpha_1.\overline{A^5A_1}^2=0,$$

. . . . . .

$$\alpha_1.\overline{M_6A_1}^2+\alpha_2.\overline{M_6A_2}^2+\alpha_3.\overline{M_6A_3}^2+\alpha_4.\overline{M_6A_4}^2-V.\overline{M_6A_5}^2-\sum\alpha_1.\overline{A_5A_1}^2=0;$$

d'où, en éliminant α_1, α_2, α_3, α_4, V, $\sum\alpha_1\overline{A_5A_1}^2$,

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & \overline{M_1A_4}^2 & \overline{M_1A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & \overline{M_2A_4}^2 & \overline{M_2A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & \overline{M_3A_4}^2 & \overline{M_3A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & \overline{M_4A_4}^2 & \overline{M_4A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_5A_1}^2 & \overline{M_5A_2}^2 & \overline{M_5A_3}^2 & \overline{M_5A_4}^2 & \overline{M_5A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_6A_1}^2 & \overline{M_6A_2}^2 & \overline{M_6A_3}^2 & \overline{M_6A_4}^2 & \overline{M_6A_5}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une relation entre les distances respectives de six points quelconques de l'espace, à cinq autres points quelconques de l'espace.

Si, aux cinq premières équations du système précédent, on adjoint l'équation évidente

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-V-0.\sum\alpha_1\overline{A_5A_1}^2=0$$

(*) On pourra comparer les relations que nous établissons dans cette note avec celles que nous avons déjà données, *J.-E.*, 1890, p. 218.

et si on élimine α_1, α_2, α_3, α_4, V, $\sum \alpha_1 \overline{A_5A_1}^2$, entre les équations du système ainsi obtenu, il vient :

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & \overline{M_1A_4}^2 & \overline{M_1A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & \overline{M_2A_4}^2 & \overline{M_2A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & \overline{M_3A_4}^2 & \overline{M_3A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & \overline{M_4A_4}^2 & \overline{M_4A_5}^2 & 1 \\ \overline{M_5A_1}^2 & \overline{M_5A_2}^2 & \overline{M_5A_3}^2 & \overline{M_5A_4}^2 & \overline{M_5A_5}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les distances respectives de cinq points quelconques de l'espace, à cinq autres points quelconques de l'espace,

II. — Soient α_1, α_2, α_3 les coordonnées barycentriques d'un point A_4 par rapport au triangle de référence A_1, A_2, A_3 ; et M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 cinq points quelconques. On peut écrire le système d'équations :

$$\alpha_1 . \overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2 . \overline{M_1A_2}^2 + \alpha_3 . \overline{M_1A_3}^2 - S . \overline{M_1A_4}^2 - \sum \alpha_1 . \overline{A_4A_1}^2 = 0$$

$$\alpha_1 . \overline{M_2A_1}^2 + \alpha_2 . \overline{M_2A_2}^2 + \alpha_3 . \overline{M_2A_3}^2 - S . \overline{M_2A_4}^2 - \sum \alpha_1 . \overline{A_4A_1}^2 = 0$$

. . . . . .

$$\alpha_1 . \overline{M_5A_1}^2 + \alpha_2 . \overline{M_5A_2}^2 + \alpha_3 . \overline{M_5A_3}^2 - S . \overline{M_5A_4}^2 - \sum \alpha_1 . \overline{A_4A_1}^2 = 0$$

En éliminant α_1, α_2, α_3, S, $\Sigma \alpha_1 \overline{A_4A_1}^2$, entre ces cinq équations, on obtient la relation :

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & \overline{M_1A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & \overline{M_2A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & \overline{M_3A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & \overline{M_4A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_5A_1}^2 & \overline{M_5A_2}^2 & \overline{M_5A_3}^2 & \overline{M_5A_4}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

entre les distances respectives de cinq points arbitrairement choisis, à quatre points quelconques situés dans un même plan.

Des quatre premières équations du système précédent, et de l'équation évidente,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - S - 0.\sum \alpha_1 \overline{A_4A_1}^2 = 0,$$

on déduit, par élimination, la relation

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & \overline{M_1A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & \overline{M_2A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & \overline{M_3A_4}^2 & 1 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & \overline{M_4A_4}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

entre les distances respectives de quatre points arbitrairement choisis dans l'espace, à quatre points quelconques situés dans un même plan.

III. — Considérons enfin trois points A_1, A_2, A_3, situés sur une même droite. Soient α_1, α_2, les coefficients dont il faut affecter les points A_1, A_2 pour que A_3 soit leur centre des distances proportionnelles. M_1, M_2, M_3, M_4 étant quatre points quelconques, on a les équations :

$$_1.\overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2.\overline{M_1A_2}^2 - (\alpha_1+\alpha_2)\overline{M_1A_3}^2 - (\alpha_1.\overline{A_3A_1}^2 + \alpha_2.\overline{A_3A_2}^2) = 0,$$

. . . . . .

$$\alpha_1.\overline{M_4A_1}^2 + \alpha_2.\overline{M_4A_2}^2 - (\alpha_1+\alpha_2)\overline{M_4A_3}^2 - (\alpha_1.\overline{A_3A_1}^2 + \alpha_2.\overline{A_3A_2}^2) = 0;$$

d'où par élimination de α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1\overline{A_3A_1}^2 + \alpha_2\overline{A_3A_2}^2$, entre ces quatre équations :

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les distances respectives de quatre points quelconques, à trois points quelconques en ligne droite.

On voit sans difficulté, que,

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

est une relation entre les distances respectives de trois points de l'espace, à trois points quelconques en ligne droite.

Remarque. — Les relations précédentes donnent lieu à de nombreux corollaires, et l'on peut déduire, notamment, de ces formules, l'équation quadripolaire d'un plan passant par trois points donnés, ainsi que l'équation tripolaire d'une droite passant par deux points donnés.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès,**

(*Suite*, voir page 217.)

XVII. — Suite des points isogonaux.

Problème I. — *Sur deux antiparallèles de l'angle* A, ADE, AD'E', *déterminer deux points isogonaux* M, M' *tels que* MM' *passe par un point donné.*

Problème II. — *Ou bien tels que la circonférence* AMM' *passe par un point donné.*

La première question, en géométrie analytique, revient à mener une tangente à une conique par un point donné et la deuxième s'y ramène par transformation.

Mais nous trouvons ici une application remarquable de la méthode, qui donne simultanément des deux questions une solution purement élémentaire.

Supposons que la condition soit que la circonférence AMM' passe par un point donné P et considérons les transformés m, m' des deux points cherchés M, M'; la droite mm' devra passer par le point p transformé de P. Et comme, d'après le théorème du paragraphe précédent, mm' et MM' sont symétriques relativement à F, milieu de EE', la droite MM' passera par le point Q symétrique de p relativement à F. Et cette seconde condition revenant à exprimer que les parallèles MM', mm' sont symétriques relativement à F, elle pourra remplacer la condition que M et M' sont isogonaux. Le problème est donc ramené à ces termes : *Sur les deux antiparallèles* AD, AD' *déterminer deux points* M, M', *tels que la circonférence* AMM' *passe par un point donné* P *et que la droite* MM' *passe par un point donné* Q. Or si l'on consi-

dère tous les couples de points M, M′ qui satisfont à la première condition, on sait qu'ils tracent sur AD, AD′ deux divisions semblables dont P est le point *autohomologue*. Et la question rentre alors dans ce problème connu : *Sur deux lignes semblables, déterminer deux points homologues* M, M′ *tels que la droite* MM′ *passe par un point donné* Q. J'en rappelle la solution pour montrer une fois de plus l'utilité des formules relatives aux angles définis à $K\pi$ près. Considérant Q comme lié à l'une des figures semblables, par exemple, à la ligne AD, on détermine son homologue Q′ dans l'autre figure, ce qui se fait en construisant le triangle QPQ′ semblable au triangle RPR′ qu'on obtient en projetant P en R et R′ sur AD, AD′. Les droites MQ, M′Q′ étant homologues, leur angle est celui des deux lignes semblables; (MQ, M′Q′) = (AD, AD′), ou (MQ, M′Q) + (M′Q, M′Q′) = (AD, AD′). Mais Q étant sur MM′, (MQ, M′Q) = o. Donc (M′Q, M′Q′) = (AD, AD′), l'angle sous lequel de M′ on voit QQ′ est ainsi connu, et M′ est sur une circonférence connue. L'intersection de cette circonférence et de AD′ détermine deux points M′, M'_1, qui répondent à la question; les droites QM′, QM'_1 coupent AD en M et M_1. Et l'on a ainsi deux couples de points M, M′; M_1, M'_1 qui fournissent les deux solutions de la question. La condition de possibilité est que la circonférence auxiliaire rencontre AD′.

On voit par la manière dont la solution a été présentée, qu'on pourrait supposer que Q, au lieu d'être un point de MM′, fut un point d'où MM′ serait vu sous un angle donné. De là, la solution de cette question : *Déterminer sur* AD, AD′ *un couple de points* M, M′ *tels que la droite* MM′ *soit vue d'un point donné* Q *sous un angle donné* α *et que le cercle* Amm′, *qui est déterminé par les deux transformés, passe par un point donné* p.

Il suffirait, au lieu de (MQ, M′Q) = o, de faire (MQ, M′Q) = α, et l'on aurait toujours (M′Q, M′Q′) égal à un angle donné (AD, AD′) − α.

Indication d'une autre solution. — Supposons qu'il s'agisse de *déterminer sur* AD, AD′ *les deux points isogonaux* M, M′ *sous la condition que* MM′ *passe par un point donné* Q.

On établit aisément ce lemme : *Si* M, M′ *sont deux points quelconques situés sur* AD, AD′, m, m′ *leurs transformés*, Q *un point*

arbitraire de MM′, *la somme algébrique des aires* AQm, Am′Q *est constante.* Et de là on déduit, toujours par des considérations d'aires, que si α, β, γ sont les coordonnées normales de Q rapportées au triangle ADD′, on a $\beta . E'm + \gamma . Em' = \alpha . EE'$. Et si M, M′ sont isogonaux et par suite m et m', on a aussi $Em' . E'm = AE . D'E'$, et l'on est ainsi ramené à construire deux lignes connaissant leur somme et leur produit. Cette solution se simplifie si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si Q est sur BC.

XVIII. Théorème 1. — *Si* ADE, AD′E′ *étant deux antiparallèles de l'angle* A, *on prend sur la première deux points* M, N *conjugués harmoniques relativement à* AD *et que* L *étant le milieu de* MN, I *soit la rencontre de* E′L *et de* BC: *1° les droites* IM, IN *rencontrent* AD′ *en deux points* M′, N′ *qui sont les isogonaux de* M,N; *2° la droite* IE *rencontre* AD′ *en un point* L′ *qui est le milieu de* M′N′.

Théorème 2. — *Si l'on prend sur* AD′E′ *deux points* m, n *équidistants de* E′ *et que* L, *étant le conjugué harmonique de* A *relativement à* mn, i *soit le point où la circonférence* ADL *rencontre la circonférence* ABC: *1° les circonférences* Aim, Ain *rencontrent* AD *en deux points* m′, n′ *qui sont les isogonaux de* m, n *et qui sont équidistants de* E; *2° la circonférence* Aid′ *rencontre* AD *en un point* L′ *qui est conjugué harmonique de* A *relativement à* m′n′.

Le second théorème se déduisant du premier par inversion symétrique, il suffit d'établir le premier.

1° D'après le théorème de Menelaüs, le point I est défini par

$$\frac{ID}{ID'} \cdot \frac{LA}{LD} \cdot \frac{E'D'}{E'A} = 1,$$

et le point M′ par

$$\frac{M'A}{M'D'} \cdot \frac{MD}{MA} = \frac{ID}{ID'}.$$

Et comme on a

$$\frac{\overline{MA}^2}{MD^2} = \frac{LA}{LD},$$

on obtient, en multipliant membre à membre avec l'égalité précédente,

$$\frac{MA . M'A}{MD . M'D'} = \frac{ID . LA}{ID' . LD}.$$

ou

$$\frac{MA . M'A}{MD . M'D'} = \frac{E'A}{E'D'}.$$

Or cette relation est une de celles qui caractérisent deux points isogonaux M, M′, ainsi qu'on peut l'établir directement, et ainsi qu'il résulte aussi de ce que cette relation n'est autre chose que la transformée de la relation déjà considérée $Em' \cdot E'm = E'A.ED$. Cette transformation, lorsqu'il s'agit comme ici de longueurs toutes comptées sur les antiparallèles AD, AD′, peut se faire en ayant égard aux signes, il suffit de remarquer qu'en grandeur et signe chaque longueur PQ ou PA + AQ est égale à

$$\frac{bc}{pA} + \frac{bc}{Aq}, \text{ ou } \frac{bc \cdot pq}{pA \cdot Aq}.$$

On verrait de même que n' est réciproque de n.

2° Le point L′ est défini par

$$\frac{L'A}{L'D'} = \frac{ID}{ID'} \cdot \frac{EA}{ED};$$

et comme on a

$$\frac{ID}{ID'} = \frac{M'A}{M'D'} \cdot \frac{MD}{MA},$$

et

$$\frac{EA}{ED} = \frac{MA \cdot MA'}{MD \cdot M'D'},$$

on conclut, en multipliant membre à membre,

$$\frac{L'A}{L'D} = \frac{M'A^2}{M'D'^2}.$$

Or M′, N′ sont évidemment conjugués harmoniques relativement à AD′, donc L′ est le milieu de M′N′.

Remarque 1. — Il suit des égalités précédentes que les deux points L, L′ sont liés par la relation

$$\frac{LA \cdot L'A}{LD \cdot L'D'} = \frac{EA^2}{ED^2}.$$

Ils ne peuvent être isogonaux.

Remarque 2. — Au lieu de se donner M, N, on pourrait se donner I sur BC, on en conclurait L, et alors M, N s'obtiendraient en portant de part et d'autre de L, LM, LN égaux à la moyenne proportionnelle entre LA et LD, ce qui suppose L extérieur à l'intervalle AD.

Cas particulier. — *Si l'on prend* L *sur la parallèle menée par* E′ *à* BC, *ce qui revient à supposer* I *à l'infini, et qu'on porte* LM, LN *définis par* $\overline{LM}^2 = \overline{LN}^2 = LA.LD$, *les parallèles à* BC,

menées par M *et* N *détermineront sur* AD′ *les points* M′, N′ *isogonaux de* M, N.

Et le cas particulier correspondant du théorème transformé sera celui-ci : *Si* L *est la rencontre de* AD′ *et de la circonférence qui passe par* A *et* D *et est tangente à la circonférence* ABC *et que l'on porte à partir de* E′ *sur* E′A *les longueurs* E′m, E′n *égales à la moyenne proportionnelle entre* E′L *et* E′A, *les circonférences menées par* A *et* m, *par* A *et* n *tangentiellement à la circonférence* ABC *détermineront sur* AD, *les points* m′, n′, *isogonaux de* m, n, *et ces deux points sont équidistants de* E.

XIX. Théorème 1. — *Sur deux antiparallèles de l'angle* A, ADE, AD′E′ *on suppose deux couples de points isogonaux* M, M′; N, N′; *démontrer 1° que les droites* MN′, NM′, *se coupent sur* BC; *2° que les circonférences* AMN′, ANM′ *se coupent sur la circonférence* ABC.

On voit que chacune des deux parties du théorème se déduit de l'autre par inversion symétrique, et qu'ainsi il suffirait d'établir l'une d'elles. Mais la démonstration directe de chacune mérite d'être indiquée.

La première partie résulte de ce que d'après la relation déjà signalée

$$\frac{MA.M'A}{MD.M'D'} = \frac{NA.N'A}{ND.N'D'}$$

les deux rapports anharmoniques (ADMN), (ADN′M′) sont égaux et par conséquent DD′, MN′, NM′ concourent.

Pour la deuxième partie, de EM.E′M′ = EN.E′N′ on déduit

$$\frac{EM}{E'N'} = \frac{EN}{E'M'} = \frac{MN}{N'M'}.$$

La circonférence AEE′ ou ABC est coupée par la circonférence AMN′ en un point P tel que

$$\frac{PE}{PE'} = \frac{EM}{E'N'} = \frac{MN}{N'M'};$$

et ce point P est du même côté de EE′ que le point A ou du côté opposé selon que $\frac{MN}{N'M'}$ a le même signe que $\frac{AE}{AE'}$ ou un signe contraire. De même les circonférences AEE′ ou ABC et ANM′ se coupent en un point Q tel que

$$\frac{QE}{QE'} = \frac{EN}{E'M'} = \frac{MN}{N'M'},$$

ce point Q étant du même côté de EE′ que A ou du côté opposé selon que $\frac{MN}{N'M'}$ a le même signe que $\frac{AE}{AE'}$ ou un signe contraire. Donc P et Q coïncident. Les trois circonférences ABC, AMN′, ANM′ se coupent en un même point.

Théorème 2. — *On considère un triangle* ABC *et un point quelconque* M *du plan. On joint le point* E *où* AM *rencontre la circonférence* ABC *à un point variable* P *de cette circonférence et si* Q *est la rencontre de* BC *et de* EP, *on trace par* A *une antiparallèle à* MQ *relativement à l'angle* A, *qui coupe la circonférence* ABC *en* G. *Démontrer que* PG *passe par un point fixe, qui est l'isogonal de* M.

Théorème corrélatif. — M *étant un point quelconque du plan de* ABC *et* D *la rencontre de* AM *et* BC, *si l'on fait passer par* A *et* D *et un point variable* P *de* BC *une circonférence qui rencontre la circonférence* ABC *en* Q, *et qu'on mène par* A *à la tangente en* A *à la circonférence* AMQ *une antiparallèle relativement à l'angle* A *qui rencontre* BC *en* G, *démontrer que la circonférence* APG *passe par un point fixe qui est l'isogonal de* M.

Il suffit d'établir le premier de ces deux théorèmes.

Appelons M′ la rencontre de PG avec l'antiparallèle à AE menée par A relativement à l'angle A, il faut prouver que M est l'isogonal de M. Soit D le point de AE situé sur BC et E′ le point de AM′ situé sur la circonférence ABC, et enfin g la rencontre de BC et d'une parallèle à MQ menée par A. En vertu de cette construction MQD, AgD sont semblables, et comme AgD est semblable à AE′G puisque g et D sont les transformés de G et E′, MQD, AE′G sont semblables et donnen

$$MQ.AG = MD.AE'.$$

Les deux triangles MQE, AM′G, évidemment équiangles donnent

$$MQ.AG = ME.AM'.$$

Donc $$\frac{ME.AM'}{MD} = AE'.$$

Cette relation caractérise deux points isogonaux M, M'. En l'écrivant, en effet, sous la forme

$$\frac{ME}{AE'} = \frac{MD}{AM'},$$

on en tire $\frac{ME}{AE'} = \frac{DE}{M'E'}$, ou $ME.M'E' = AE'.DE$.

Théorème 3. — *Si, T étant le point de concours des tangentes en B et C à la circonférence ABC, on trace par B deux droites Bx, Bx', antiparallèles relativement à l'angle ABT, et par C deux droites Cy, Cy' antiparallèles relativement à l'angle ACT, les rencontres des deux circonférences qui passent par A et B et sont tangentes l'une à Bx, l'autre à Bx', avec les circonférences qui passent par A et C et sont tangentes à Cy, Cy' déterminent deux couples de points isogonaux.*

Les deux premières circonférences, en effet, sont les transformées de deux droites menées par C et antiparallèles relativement à l'angle ACB, et les deux autres les transformées de deux droites menées par B et antiparallèles relativement à l'angle ABC.

Démonstration directe et généralisation de ce théorème.

Les deux droites Bx, Bx' sont symétriques relativement à la bissectrice de l'angle ABT; cette bissectrice ne change pas si l'on fait tourner en sens inverse BA, BT, d'un angle égal à B, de manière à amener BA sur BC; et si l'on opère de même pour l'angle ACT, on voit que les rencontres de Bx et Cy, de Bx' et Cy' sont deux points isogonaux relativement à un triangle PBC dont les angles en B et C sont B — A et C — A. De sorte que le théorème revient à celui-ci : *Si* K, K' *sont deux points isogonaux relativement à un triangle* PBC *qui a pour angles* 3A, B — A, C — A, *le point où se coupent les deux circonférences tangentes à* KB, KC *et passant l'une par* A, B, *l'autre par* A, C, *et celui où se coupent les circonférences tangentes à* K'B, K'C *et passant par* A, B; A, C, *sont isogonaux relativement à* ABC.

Sous cette forme, le théorème se généralise ainsi :

Si K, K' *sont deux points isogonaux relativement à un triangle* PBC *dont les angles sont* α, β, γ, *le point où se rencontrent les cir-*

conférences qui passent par A, B; A, C *et sont tangentes l'une à* BK, *l'autre à* CK, *et celui où se rencontrent les circonférences qui passent par* A, B; A, C *et sont tangentes à* BK′, CK′ *sont complémentaires relativement au point qui aurait pour coordonnées angulaires* $\lambda = \alpha - 2A$, $\mu = \gamma - 2C$, $\nu = \beta - 2B$.

Désignons par M le point de rencontre des deux premières circonférences, par M′ celui des deux autres, par λ_1, μ_1, ν_1, λ'_1, μ'_1, ν'_1, les coordonnées angulaires de ces deux points et par α_1, β_1, γ_1; α'_1, β'_1, γ'_1, les angles des deux triangles KBC, K′BC. On a $\mu_1 = (MC, MA) = (CK, CA) = (CK, CB) + (CB, CA) = \gamma_1 - C$. Ainsi $\mu_1 = \gamma_1 - C$, et de même $\nu_1 = \beta_1 - B$ et par suite $\lambda_1 = \alpha_1 - A$. De la même manière $\lambda'_1 = \alpha'_1 - A$, $\mu'_1 = \gamma'_1 - C$, $\nu'_1 = \beta'_1 - B$. D'où $\lambda_1 + \lambda'_1$ ou $\lambda = \alpha_1 + \alpha'_1 - 2A = \alpha - 2A$, $\mu = \gamma - 2C$, $\nu = \beta - 2B$.

Dans le cas particulier du théorème 3, λ, μ, ν sont égaux à A, B, C, d'où $\alpha = 3A$, $\beta = 2B + C = B - A$, $\gamma = 2C + B = C - A$.

Si, comme autre cas particulier, on veut que M, M′ soient conjugués, c'est-à-dire si $\lambda = 2A$, $\mu = 2B$, $\nu = 2C$, on aura pour le triangle PBC relativement auquel K et K′ sont isogonaux, $\alpha = 4A$, $B = -2A$, $\gamma = -2A$. P est à la rencontre des symétriques de BC relativement aux tangentes BT, CT à la circonférence ABC.

Si l'on veut enfin que M et M′ soient isoptiques, on a pour PBC $\alpha = 2A$, $\beta = 2B$, $\gamma = 2C$, P coïncide avec le transformé de l'orthocentre, précédemment désigné par L.

Théorème 4. — *Par* A *on trace deux droites, antiparallèles relativement à l'angle* C, *qui rencontrent* BC *en* F, F′. *Démontrer que si l'on considère un point quelconque* M *sur la circonférence* ABF, *le point isogonal* M′ *est sur la circonférence* ABF′ *et que le rapport* $\frac{FM.F'M'}{AM.AM'}$ *reste constant, lorsque* M *parcourt la circonférence* ABF.

La circonférence AFF′ est tangente à AC, elle a donc pour transformée une droite parallèle à AB, et comme les transformés f, f' de F, F′ sont sur la circonférence ABC, la corde ff' est parallèle à AB. Par suite Cf, Cf' sont antiparallèles relativement à l'angle C. Or Cf est la transformée de la circonfé-

rence ABF et Cf' celle de la circonférence ABF'. Le transformé m de M est sur Cf, le transformé m' de son isogonal M', étant l'isogonal de m, est donc sur Cf'; ce qui prouve que M' est sur la circonférence ABF'. De plus on sait que $fm.f'm'$ est constant. Or

$$fm = \frac{bc.\mathrm{FM}}{\mathrm{AF.AM}} \qquad \text{et} \qquad f'm' = \frac{bc.\mathrm{F'M'}}{\mathrm{AF'.AM'}}.$$

Donc $\dfrac{\mathrm{FM.F'M'}}{\mathrm{AM.A'M'}}$ est constant.

Remarque. — De même que dans le théorème 3, les circonférences ABF, ABF' étant les transformées de deux droites Cf, Cf' antiparallèles relativement à C, les tangentes en B à ces deux circonférences sont antiparallèles relativement à l'angle ABT formé par AB et la tangente BT à la circonférence ABC. De là ce théorème : *Si l'on trace deux droites variables* Bx, Bx' *antiparallèles relativement à l'angle* ABT, *les circonférences menées par* A *et* B *tangentiellement à ces droites déterminent sur* BC *des couples de points* F, F' *formant une involution qui a* C *pour point central.* *(A suivre.)*

BIBLIOGRAPHIE

Traité de Géométrie, par E. Rouché et Ch. de Comberousse; sixième édition, revue et augmentée.

La nomenclature des éloges qu'on peut adresser à cet ouvrage est depuis longtemps épuisée. Les éditions nombreuses qu'il a eues ont permis à ses auteurs de le tenir constamment à la hauteur des progrès de la Géométrie. La sixième édition, que vient de publier M. Gauthier-Villars, marquera parmi celles qui ont été l'objet des plus heureuses additions.

Nous avons particulièrement remarqué la Note qui suit le livre II où se trouvent deux chapitres pleins d'intérêt. L'un porte sur les *Méthodes en Géométrie*, qui ont été développées dans un livre très remarquable, mais d'une lecture difficile pour de jeunes élèves; nous voulons parler de l'ouvrage publié en 1855, sous le même titre, par M. Paul Serret. Les quelques pages consacrées, dans ce chapitre, à l'exposition de la marche qu'il convient d'adopter, dans certaines classes de problèmes, sont empreintes de l'esprit philosophique le plus large et le plus vrai. Elles deviendront et resteront classiques.

Le second chapitre de la Note en question porte sur le théorème de Chasles (*) sur lequel M. A. Poulain vient, précisément, d'écrire une Note

(*) Voyez l'énoncé de ce théorème et la Note qui l'accompagne, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, numéro de septembre, p. 197.

dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (p. 193). MM. Rouché et de Comberousse distinguent, avec raison, les polygones égaux et *de même sens ou de sens contraires*. Avec cet'e distinction, le théorème de Chasles n'est plus soumis à l'objection, depuis longtemps relevée contre lui; il faut seulement observer qu'il comporte deux énoncés très distincts.

Beaucoup d'autres perfectionnements ont été apportés à cette sixième édition ; le plus important nous paraît être la Note III qui termine le premier volume. Voici comment s'expriment, à ce sujet, MM. Rouché et de Comberousse.

« Enfin, la Note III est consacrée à la *Géométrie récente du triangle* qui prend place, pour la première fois, dans un Traité.

» Depuis quelques années, en effet, un grand nombre de Géomètres se sont occupés des propriétés du triangle, et un nouveau Chapitre très intéressant a été ajouté par eux à la Science. Nous ne pouvions laisser ces travaux de côté, et nous commencions à les coordonner pour cette sixième édition, lorsque M. J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège, et l'un de ceux qui, avec MM. E. Lemoine et H. Brocard, ont le plus contribué à ces découvertes, a bien voulu nous communiquer un travail complet sur ce sujet. Nous avons cru devoir en extraire intégralement la Note III, en nous bornant à y ajouter quelques indications bibliographiques très succintes. »

Le *Journal de Mathématiques élémentaires* a trop contribué à la diffusion de cette *Géométrie récente* pour ne pas s'applaudir de la voir prendre rang dans un traité classique.

Déjà, à l'étranger, ont paru de nombreux ouvrages, où elle se trouve longuement exposée. Ce mouvement ne se ralentira pas et nous en avons eu, récemment, une preuve bien palpable, en feuilletant le manuscrit fort étendu que M. J. S. M'Cay, le savant professeur de l'Université d'Edimbourg, vient d'écrire sur ce sujet (*).

Ajoutons enfin, après avoir exprimé notre regret de ne pouvoir consacrer plus de place à ce compte rendu, que, par un complément naturel, une Note est consacrée, dans le livre II, à la *Géométrie récente du tétraèdre*. On peut seulement regretter qu'elle ne soit pas accompagnée, comme la Note III de la géométrie plane, de quelques indications bibliographiques permettant, aux lecteurs curieux, de remonter aux sources originales.

La librairie Alcan met en vente plusieurs ouvrages nouveaux de M. Combette, inspecteur d'Académie à Paris.

1° **Cours de Trigonométrie**, à l'usage des candidats au baccalauréat, etc. (1 vol. in-8°, prix 4 fr.).

2° **Cours élémentaire de statique**, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques élémentaires, etc. (1 vol. in-8°; prix 3 fr.).

3° **Cours abrégé d'Algèbre élémentaire**, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques élémentaires *(Baccalauréat ès sciences)* et de l'enseignement secondaire moderne (3e édition ; prix 4 fr. 50).

Nous avons trop souvent recommandé, aux candidats au baccalauréat

(*) Dans cet ouvrage qui, nous l'espérons, ne tardera pas à paraître, la Géométrie du triangle est développée, mais bornée aux seules propriétés de cette figure. Encore, l'auteur a-t-il uniquement, choisi celles qui peuvent être présentées sans autre base que les éléments d'Euclide. Malgré cette double réserve, le livre ne comportera pas moins de 400 pages.

ès sciences et à ceux qui se proposent d'entrer dans les écoles du Gouvernement, les ouvrages de M. Combette, pour qu'il soit nécessaire de le faire ici une fois de plus.

Le cours de statique est tiré, tout naturellement, du cours de mécanique du même auteur. Il correspond au programme du 24 janvier 1891.

Le Cours de Trigonométrie est un ouvrage nouveau, très complet et rédigé avec une grande clarté.

Il comprend la trigonométrie sphérique et il est suivi de plus de 500 exercices qui ajoutent notablement à son intérêt. On sait quelle richesse d'exercices on trouve dans les trigonométries anglaises. C'est un exemple bon à suivre; il faut pourtant, comme l'a fait M. Combette, apporter du discernement dans le choix de ces exercices qui doivent, pour porter tous leurs fruits, être aussi variés que possible.

Pour finir cette Notice bibliographique, nous devons encore signaler les ouvrages suivants de M. Joseph Badier, licencié ès sciences mathématiques. professeur de mathématiques, publiés par la librairie Delhomme et Briguet (Lyon, 2, avenue de l'Archevêché; Paris, 13, rue de l'Abbaye).

1° **Eléments d'Arithmetique**, à l'usage des candidats à la première partie des examens du baccalauréat de l'enseignement secondaire classique (programme du 8 août 1890).

2° **Eléments d'Algèbre**.

Ces éléments visent les mêmes candidats et, en outre, ceux qui se destinent au baccalauréat de l'enseignement spécial.

3° **Eléments de Cosmographie** conformes aux programmes du baccalauréat de l'enseignement secondaire classique et du baccalauréat de l'enseignement secondaire moderne.

L'auteur, comme il le dit dans la préface de son Algèbre, a voulu conserver à ces ouvrages « le caractère de simplicité et de clarté qui leur sont imposés par les programmes auxquels ils veulent répondre ». Il nous a semblé, en les parcourant, qu'il y a pleinement réussi. Ce sont vraiment des livres simples, écrits dans une forme très claire. N'est-ce pas le meilleur éloge que l'on puisse faire d'ouvrages qui n'ont d'autre prétention que d'ouvrir aux jeunes esprits les premières notions des mathématiques? Ils sont d'ailleurs accompagnés de nombreux exercices qui leur donne une note personnelle. Nous les recommandons aussi, et tout particulièrement, bien qu'ils n'aient probablement pas été écrits à leur intention, aux instituteurs et aux élèves des écoles normales primaires.

CORRESPONDANCE

M. A. Poulain nous adresse la lettre suivante au sujet de la question 378 résolue dans le numéro précédent (p. 235).

La relation (*)

(*) Par cette notation abregée on représente un determinant dont les lignes se déduisent successivement de la première par la permutation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a deux interprétations géométriques.

La première concerne un point peu étudié, I′, dont les coordonnées barycentriques sont cos A, cos B, cos C. Il résulte de (1) que I′ est situé sur la droite GΓ; Γ étant le point de Gergonne de ABC. Ce point I′ dont j'ai donné trois constructions directes (*Mathesis*, 1890, p. 250) se trouve aussi sur la droite qui joint I, centre du cercle inscrit, au troisième potentiel du triangle. Car la relation à vérifier revient à celle-ci, bien connue : $\Sigma \sin^3 A \sin(B - C) = 0$.

Enfin les points $P\left(\sin^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$, $Q\left(\cos^2\frac{A}{2}, \ldots\right)$ partagent harmoniquement GI′ à cause des relations $2\sin^2\frac{A}{2} = -\cos A$, etc... De là une nouvelle construction de I′, car P et Q peuvent s'obtenir soit par une construction directe (*Mathesis*, ibid.), soit en joignant I aux extrémités O, K du diamètre de Brocard et en prolongeant jusqu'à GΓ. En effet, Q est situé sur IK (Boutin, *J. E.* 1890, p. 225). P est sur IO. Cet énoncé est la seconde interprétation de (1), quand on y a multiplié les lignes par sin A,...

M. Boutin a fait remarquer *(ibid.)* que Q se trouve sur une quelconque des droites joignant respectivement $I_a, \ldots$ aux milieux des côtés. Il en résulte la relation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} -a & 0 & \cos^2\frac{A}{2} \\ b & 1 & \cos^2\frac{B}{2} \\ c & 1 & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

En divisant les lignes de ce déterminant, respectivement, par sin A,... on trouve un alignement pour le point de Nagel v.

---

circulaire des lettres. Une légère faute, sans influence sur le calcul et sur le raisonnement suivi, s'est glissée dans la première solution de la question 378. Le facteur 2, comme nous l'a fait observer M. Poulain, facteur qui figure au dénominateur, doit être placé au numérateur.

G. L.

Un raisonnement analogue fait passer de l'alignement QIK à l'alignement connu νGI. lequel résulte de ce que ν est l'anticomplémentaire de I.

Quelques rectifications, ou errata, nous écrit M. Vigarié, sont à signaler dans mon article relatif à la méthode de transformation de M. Schoute.

Page 130, ligne — 4 *au lieu de* : + cotg C +
lisez : + cotg B cotg C +

» 155, » — 6 *au lieu de* : La correspondante
lisez : La courbe correspondante

» 182, » 20 *au lieu de* : $\dfrac{x}{4S^0x'' \cos A - K''} = \text{etc...}$

lisez : $\dfrac{x''}{4Sx \cos A - K} = \text{etc...}$

Dans les formules (14) x'', y'', z'' et x''_2, y''_2, z''_2 sont des coordonnées normales, le triangle orthocentrique ; H_a H_b H_c étant pris pour triangle de référence.

Page 183, ligne 11 *après* le mot « particulier » *ajoutez* : par I et I′ les transformations par points inverses par rapport au triangle ABC et au triangle orthocentrique.

Page 183, ligne 14 *au lieu de* : R_hIR_h
lisez : $R_hI'R_h$

» 183, » 15 *au lieu de* : $IR_0IR_h IR_h$
lisez : $IR_0IR_h I'R_h$

» 183, » 17 biffer cette ligne et les trois suivantes.

» 183, » 4 La seconde construction des points jumeaux doit être ainsi énoncée : prendre le point ϖ' transformé par rayons vecteurs réciproques (centre H, puissance $-\rho^2$) de P ; puis le point ϖ'_2 inverse de ϖ' par rapport au triangle orthocentrique, enfin le point π transformé par rayons vecteurs réciproques (centre H, puissance $-\rho^2$) de ϖ'_2. π sera le point cherché P′ (*).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 224)

191. — *Les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de Brocard, rencontrent la circonférence circonscrite aux points* A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. *Démontrer que les triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ABC, *sont égaux ; que les deux premiers se déduisent du dernier en le faisant tourner, autour de* O, *de l'angle* 2θ, *dans un*

(*) Cette erreur nous a été signalée par M. Bernès.

G. L.

sens ou dans l'autre. Ω *est un point de Brocard, commmun à* ABC *et* $A_1B_1C_1$; Ω' *un point de Brocard, commun à* $A_2B_2C_2$ *et* ABC; *le second point de Brocard, de* $A_1B_1C_1$ *est le symétrique de* Ω' *par rapport à* $O\Omega$; *le second point de Brocard, de* $A_2B_2C_2$ *est le symétrique de* Ω *par rapport à* $O\Omega'$.

192. — *Le lieu géométrique des points* M *tels, que la droite harmoniquement associée soit parallèle à la direction déterminée par*

$$(1) \qquad lx + my + nz = 0,$$

est une conique circonscrite au triangle de référence.

On trouve aisément, pour l'équation du lieu,

$$(2) \qquad \sum \frac{cm - bn}{x} = 0 .$$

Remarque. — Si (1) est l'axe orthique, (2) est l'hyperbole de Kiepert.

193. — *Trouver, dans le plan du triangle, un point* M, *tel que* A_1, B_1, C_1, *étant ses projections orthogonales sur les côtés de* ABC, *les quadrilatères :* MA_1BC_1, MB_1AC_1, MA_1CB_1, *aient même périmètre.*

Soient x, y, z, les coordonnées normales du point cherché. Les équations du problème sont :

$$\frac{y+z}{\sin A}(1 + \sin A + \cos A) = \frac{x+z}{\sin B}(1 + \sin B + \cos B)$$
$$= \frac{x+y}{\sin C}(1 + \sin C + \cos C);$$

d'où, en désignant par k le facteur qui est le même pour x, y, z :

$$kx = \frac{\sin B}{1 + \sin B + \cos B} + \frac{\sin C}{1 + \sin C + \cos C} - \frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A}$$

ou $kx\sqrt{2} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)} + \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{C}{2}\right)} - \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)}$

ou enfin, $kx\sqrt{2} = \cos A + 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

On peut remarquer que ce point est sur OJ_2, J désignant le premier point réciproque du point de Nagel, ν.

194. — *Distance du centre du cercle circonscrit au point de Gergonne* Γ.

On trouve : $$\overline{O\Gamma}^2 = R^2 - \frac{4pS(R + r)}{(4R + r)^2}.$$

CERTIFICAT D'APTITUDE

A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Juillet 1891)

Arithmétique et Algèbre.

I. — Deux fractions ordinaires irréductibles ont le même dénominateur ; en les convertissant en fraction décimale, avec une approximation indéfinie, on obtient deux quotients périodiques :

1° Démontrer que, pour chacun de ces quotients, la période a le même nombre de chiffres, et que les chiffres de la partie irrégulière, c'est-à-dire ceux qui précèdent la première période, sont aussi en même nombre, lorsqu'ils existent ;

2° En supposant la somme des deux fractions ordinaires données égale à l'unité, prouver que la somme de deux restes de même rang est égale au dénominateur commun et que la somme de deux chiffres décimaux de même rang est égale à 9.

II. — Une demi-circonférence, de rayon donné R, est limitée par un diamètre AOB ; par le centre O on mène, perpendiculairement au diamètre AB une demi-droite indéfinie OX, qui coupe la demi-circonférence donnée au point C, et sur laquelle on prend un point M que l'on joint au point A ; la ligne MA rencontre en D la demi-circonférence ; on fait tourner toute la figure autour de AB et on appelle V_1 et V_2 les volumes respectivement engendrés, dans une révolution complète, par le triangle mixtiligne MCD et par le segment de cercle limité à la corde AD et à l'arc commençant en A et finissant en D :

1° Déterminer la position du point M de telle sorte que l'on ait :

$$V_1 = mV_2$$

m étant un nombre positif donné. Discussion par rapport à m.

Application numérique : $m = \frac{3}{2}$; $R = 1$;

2° Pour certaines valeurs de m on trouve deux points M′ et M″ répondant à la question. Quelle valeur faut-il donner à m pour que l'on ait la relation :

$$\overline{OM''}^2 - \overline{OM'}^2 = pR^2,$$

p étant un nombre positif donné. Discussion par rapport à p.

Application numérique : $p = 1$.

Donner les résultats à 0,01 près.

Trigonométrie et Géométrie.

I. — Quels sont les différents systèmes d'équations qu'on établit entre les éléments d'un triangle ? Démontrer l'équivalence de ces systèmes.

II. — Par un point P, on mène aux asymptotes d'une hyperbole donnée des parallèles qui coupent la courbe en M et N :

1° Trouver l'équation de la droite MN, quelle est sa direction, et que vaut le rapport des distances du point P à cette droite MN et à la polaire de P ?

2° Trouver le lieu géométrique du point P pour que la droite MN passe par le centre de l'hyperbole;

3° On mène du centre la perpendiculaire OH sur la ligne MN. Quel est le lieu du point H, quand on fait varier l'angle des asymptotes en laissant fixes les sommets A et A′ de l'hyperbole,

4° Trouver le lieu du point P pour que la droite MN soit tangente à l'ellipse qui a les mêmes axes que l'hyperbole donnée, celle-ci étant invariable. — Construire la courbe ainsi obtenue, tracer ses asymptotes.

Concours général en cinquième année de l'enseignement secondaire spécial (1891).

La distance d'un point M à une circonférence de centre O et de rayon R étant, par définition, la valeur absolue de la différence MO — R, on considère dans un même plan P deux circonférences dont les centres O et O′ sont à une distance D, et dont les rayons R et R′ (R $\geqslant$ R′) sont donnés. Un point M se déplace dans le plan P en restant toujours à la même distance des deux circonférences.

1° Discuter la ligne L parcourue par le point M;

2° Indiquer les régions du plan P pour lesquelles les points sont plus voisins de la circonférence O que de la circonférence O′;

3° On suppose un mobile parcourant la ligne L de sorte qu'un même arc ne soit jamais parcouru qu'une seule fois, et l'on considère les projections de ce mobile sur une droite X′X passant par le milieu C de OO′ et faisant avec CO′ l'angle α dont la valeur positive ne dépasse pas 90°. — Construire les limites des portions de X′X qui sont parcourues plus de deux fois par la projection.

En supposant les deux circonférences sécantes, on calculera, en fonction des données R, R′, D, α, les portions de XX′ ainsi limitées.

QUESTION 379

Solution par M. Svéchnicoff, à Troïtzk.

Rendre calculables, par logarithmes, les quantités suivantes :

1° $A = \sin a \sin(b-c)\, tg\, a + \sin b \sin(c-a)\, tg\, b + \sin c \sin(a-b)\, tg\, c$;

2° $B = \cos a \sin(b-c) \cot g\, a + \cos b \sin(c-a) \cot g\, b + \cos c \sin(a-b) \cot g\, c$;

(B. Sollertinsky.)

1° On a

$$\sin a \sin(b-c)\operatorname{tg} a + \sin b \sin(c-a)\operatorname{tg} b$$

$$= \frac{\sin^2 a(\sin b \cos c - \cos b \sin c)\cos b + \sin^2 b(\sin c \cos a - \cos c \sin a)\cos a}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{\sin a \sin b \cos c(\sin a \cos b - \sin b \cos a) - \sin c(\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a)}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{\sin(a-b)[\sin a \sin b \cos c - \sin c \sin(a+b)]}{\cos a \cos b} = C;$$

d'où $$A = C + \frac{\sin^2 c \sin(a-b)}{\cos c}$$

$$= \frac{\sin(a-b)[\sin a \sin b \cos^2 c - \sin c \cos c \sin(a+b) + \cos a \cos b \sin^2 c]}{\cos a \cos b \cos c}.$$

Mais $$\sin a \sin b \cos^2 c + \cos a \cos b \sin^2 c$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(a-b)\cos^2 c - \cos(a+b)\cos^2 c + \cos(a-b)\sin^2 c + \cos(a+b)\sin^2 c]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)\cos 2c].$$

Par suite,

$$A = \frac{\sin(a-b)[\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin 2c - \cos(a+b)\cos 2c]}{2\cos a \cos b \cos c}$$

$$= \frac{\sin(a-b)\{\cos(a-b) - \cos(a+b-2c)\}}{2\cos a \cos b \cos c}$$

$$= \frac{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin b-c)}{\cos a \cos b \cos c}.$$

2° En remplaçant, dans cette formule, a, b, c par $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - c$,

on a $$-B = \frac{\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin a \sin b \sin c},$$

ou $$B = \frac{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}{\sin a \sin b \sin c},$$

Remarque. $\frac{A}{B} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$.

QUESTION 380

Solution, par M. Youssoufian, à Constantinople.

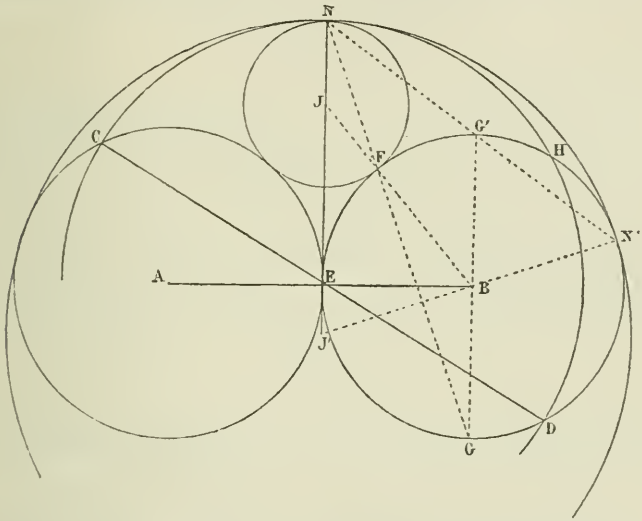
Deux cercles égaux A, B *sont tangents extérieurement. Par le point de contact* E, *on mène une transversale, qui coupe* A, *en* C; B, *en* D. *Sur* CD, *comme diamètre, on décrit une circonférence, qui coupe le cercle* B *en* H. *Démontrer que le rayon* ρ, *du cercle inscrit à la figure formée par les arcs* EC, CH, HE, *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{2r\cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha},$$

dans laquelle r *désigne le rayon des cercles proposés,* α *l'angle que la sécante* CD *fait avec la ligne des centres.*

(G. Russo.)

Les deux cercles étant égaux, les cordes CE, ED le sont aussi; par suite, le centre du cercle décrit sur CD comme diamètre est en E. La figure formée par les arcs EC, CH, HE est donc symétrique par rapport à la tangente commune, et le



centre du cercle cherché se trouve situé sur cette tangente.

Soit J le centre de ce cercle. Je joins J au centre B de l'un des cercles donnés. Je forme ainsi un triangle JEB, rectangle en E, dans lequel

$$JB = r + \rho, \quad EB = r, \quad EO = CE - \rho = 2r\cos\alpha - \rho.$$

On a donc

$$(1) \qquad (r + \rho)^2 = (2r\cos\alpha - \rho)^2 + r^2;$$

d'où

$$\rho = \frac{2r\cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha}.$$

Généralisation (*). — Soient r_1, r_2 les rayons des cercles

(*) Cette généralisation est de M. Svéchnicoff, à Troïtzk.

A, B qui sont inégaux. Traçons la circonférence L, dont le centre est le point E et dont le rayon est égal à $\frac{1}{2}\overline{CD}$. Soit ρ le rayon du cercle J tangent intérieurement à L et extérieure- à A, B. Alors nous aurons

$$\rho = \frac{(r_1 + r_2)^3 \cos^2 \alpha}{4r_1r_2 + 2(r_1 + r_2)^2 \cos \alpha}.$$

En effet, le triangle ABJ donne

$$\overline{BE}.\overline{AJ}^2 + \overline{AE}.\overline{BJ}^2 = (\overline{AE} + \overline{BE})(\overline{AE}.\overline{BE} + \overline{EJ}^2),$$

ou

$$r_2(r_1 + \rho)^2 + r_1(r_2 + \rho)^2 = (r_1 + r_2)[r_1r_2 + \{(r_1 + r_2)\cos\alpha - \rho\}^2],$$

d'où l'on tire la formule proposée.

Construction géométrique (*). — Les perpendiculaires à AB, élevées aux points E, B, dans des directions contraires, rencontrent les circonférences E, B aux points N, G. La droite NG coupe la circonférence B, en F; BF rencontre EN en J; c'est le centre cherché.

On peut observer qu'il existe un autre cercle tangent aux circonférences A, B, E, dont le centre J′ s'obtient comme l'indique la figure. Son rayon ρ' est donné par la formule :

$$\rho' = \frac{2r \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha - 1}.$$ See p 29[illegible]

Nota. — M. Théodore Vladimiresco nous a adressé une autre solution très simple de cette question, basée sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.

QUESTION 381

Solution par B. Sollertinsky.

1° **Exercice numérique.** — *Simplifier la somme des fractions*

$$(2n+1)\frac{2.3.4\ldots n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}}, \qquad (2n-3)\frac{4.5\ldots n}{5.7\ldots\overline{2n-1}},$$

$$(2n-7)\frac{6.7\ldots n}{7.9\ldots\overline{2n-3}}, \ldots \text{pour } n = 7, 8, 9, 10, \ldots (**)$$

(*) Donnée par M. Sollertinsky.

(**) Le dernier produit, en numérateur, est n ou $(n-1)n$; selon que n est *pair* ou *impair*.

2° **Théorème.** — *La somme des fractions considérées dans la question précédente, est* $\frac{n}{n+1}$ *ou* $\frac{n-1}{n+2}$, *suivant que* n *est pair ou impair.*

3° **Théorème.** — *Soit* n *un nombre entier ; soit* k *un nombre entier inférieur à* n. *On a*

$$\frac{1}{n-k} - \frac{k}{(n-k)(n-k+1)} + \frac{k(k-1)}{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}$$
$$\ldots \pm \frac{k(k-1)\ldots 1}{(n-k)(n-k+1)\ldots n} = \frac{1}{n}.$$

(E. Catalan.)

1° et 2° On vérifie sans peine que la somme à déterminer est

$$\frac{2.3.4\ldots n}{3.5.7\ldots 2n-1}$$
$$\left\{1 + \frac{2n-3}{2} + \frac{(2n-7)(2n-1)}{2.4} + \frac{(2n-11)(2n-1)(2n-3)+\ldots}{2.4.6}\right\}.$$

Le nombre des termes entre crochets est $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, et le dernier terme est

$$\frac{5.(2n-1)(2n-3)\ldots(n+5)}{2.4.6\ldots(n-2)} \text{ ou } \frac{7.(2n-1)(2n-3)\ldots(n+6)}{2.4.6\ldots(n-3)},$$

suivant que n est un nombre pair ou impair.

En sommant ces termes, on trouve successivement

$$\frac{2n-1}{2},\quad \frac{(2n-1)(2n-3)}{2.4},\quad \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2.4.6}\ldots$$

Enfin

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(n+3)}{2.4\ldots(n-2)} \text{ ou } \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(n+4)}{2.4\ldots(n-3)}$$

donc, la somme cherchée est, suivant les cas, $\frac{n}{n+1}$ ou $\frac{n-1}{n+2}$.

3° Le premier membre de l'égalité peut être mis sous la forme

$$(-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 1}{(n-k)(n-k+1)\ldots n}$$
$$\left\{1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\right\},$$

et la sommation des termes entre crochets donne, successivement :

$$-\frac{n-1}{1},\quad \frac{(n-1)(n-2)}{1.2},\quad -\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3},\ldots$$

$$(-1)^k\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1.2.3\ldots k}$$

L'identité proposée se trouve ainsi établie (*).

QUESTION PROPOSÉE

419. — On considère le rectangle circonscrit aux quatre sommets A, A′, B, B′ d'une ellipse. Soit I le point de rencontre d'une des diagonales de ce rectangle avec l'ellipse. Montrer que les angles $\widehat{AIA'}$ et $\widehat{BIB'}$ sont supplémentaires.

(E.-N. Barisien.)

ERRATA

Page 108. Lignes 16 et 17 : les équations représentent les *transversales* RÉCIPROQUES des droites signalées aux lignes 18 et 20.

Page 228. Ligne 4 : *au lieu de* travaux, *lisez* tableaux.

Le livre analysé *(loc. cit.)* est édité, nous avions oublié de mentionner ce fait par la librairie Gauthier-Villars.

Page 228. Ligne 3 en remontant : *au lieu de* cordes, *lisez* cercles.

Page 230. Ligne 9, en remontant : *au lieu de* $\widehat{ACB}$, *lisez* $\widehat{ABC}$.

Page 231. Ligne 2, en remontant : *au lieu de* ABD, *lisez* ABC.

Page 232. Ligne 21 : *au lieu de* le point de Lemoine de ABC, *lisez* le point de Lemoine de A′B′C′.

Page 234. Ligne 11 : *au lieu de* AFDH, *lisez* AFDH′.

1890; page 254. Ligne 7 : *lisez :* au RÉCIPROQUE de l'indice point.

(*) On peut consulter, relativement à cette question, le mémoire intitulé *Sur les polynômes de Legendre, d'Hermite et de Polignac.*

E. C.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22136-10-91.

TRANSFORMATION PAR INVERSION SYMÉTRIQUE

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, voir page 244.)

XX. — Sur les transformés des podaires de deux points isogonaux, et relations qui s'y rattachent.

m, m' étant deux points isogonaux, considérons, pour m, le triangle pqr dont les sommets q, r sont les rencontres de AB, AC avec la perpendiculaire en m à Am, et dont le sommet p est à l'intersection des circonférences Bmq, Cmr; et, pour m', un triangle $p'q'r'$ construit de même. Ces deux triangles donnent lieu au théorème suivant.

Théorème. — *1°* p, p′ *sont sur la circonférence* ABC, *et le diamètre* AS *de cette circonférence est tangent aux deux circonférences* Apm, Ap′m′.

2° Am, pm *rencontrent la circonférence* ABC *aux deux extrémités d'un même diamètre; et, de même,* Am′, p′m′.

3° Les six points p, q, r, p′, q′, r′, *sont situés sur un même circonférence qui a son centre sur la symédiane issue de* A *dans le triangle* Amm′*; et si* e *est le point où cette symédiane rencontre la circonférence* Amm′, *les distances des six points à* e *et* A *sont proportionnelles.*

4° Le podaire de m *relativement au triangle* pqr *est semblable au podaire, relativement à* ABC, *de l'isocyclique* M′ *de* m. *Et de même pour* m′ *et* p′q′r′.

Raisonnons sur le triangle pqr. Soient M le transformé de m, et PQR le podaire de M relativement à ABC. Le triangle pqr est le transformé de PQR. En effet qr perpendiculaire, en m, à Am, est la transformée de la circonférence AQRM qui a AM pour diamètre, q, situé sur AB, est donc le transformé de Q situé sur AC, et r le transformé de R. Les circonférences Bmq Cmr sont les transformées des circonférences CMQ, BMR, qui se coupent en P, donc p est le transformé de P. Alors :

1° Puisque P est sur BC, p est sur la circonférence ABC, et puisque MP est perpendiculaire à BC, la circonférence Amp est orthogonale à la circonférence ABC, par conséquent tangente au diamètre AS. Même chose pour p' et la circonférence A$p'm'$.

De là une construction plus simple de p et p'. On prend la rencontre g de qr et de la tangente, en A, à la circonférence ABC, et l'on projette A sur la droite gs; ou, ce qui revient au même, p est l'intersection de gs et de la circonférence ABC. Construction analogue pour p'.

2° Soient f, f_1 les points où Am et pm rencontrent la circonférence ABC. Ces points sont les transformés des points F, F_1 où AM et la circonférence APM rencontrent BC. Or cette dernière circonférence a pour diamètre F_1M; par suite, l'angle MAF_1 est droit. Donc la circonférence AFF_1 coupe orthogonalement BC et sa transformée ff_1 coupe orthogonalement la circonférence ABC; c'est-à-dire que f et f_1 sont les extrémités d'un diamètre de cette circonférence.

De là résulte la construction la plus simple de p. On trace par f, où AM rencontre la circonférence ABC, le diamètre ff_1; la droite f_1m coupe la circonférence ABC en p.

3° Si M et M′ sont les transformés de m, m', et PQR, P′Q′R′ leurs podaires relativement à ABC; ces deux triangles sont inscrits à un même cercle, qui a son centre, au milieu E de MM′. L'explication peut se réduire à ces termes : les droites QR, Q′R′, respectivement perpendiculaires à AM′, AM, sont antiparallèles relativement à A′; et les quatre points Q, R, Q′, R′ sont sur une même circonférence. Le centre de cette circonférence est en E, car les perpendiculaires au milieu de QQ′ et RR′ passent toutes deux par le milieu E de MM′. Pour la même raison, E est le centre de la circonférence RPR′P′. Ces deux circonférences, ayant même centre et le point R commun, coïncident. Donc les six points P, Q, R, P′, Q′, R′ sont sur une même circonférence ayant E pour centre.

Ceci admis, il est clair que les six transformés p, q, r, p', q', r', sont sur une même circonférence, transformée de la première. Et comme le centre E de celle-ci, milieu de Mm', a pour transformé le point e où la symédiane, issue de A, dans le triangle

Amm', rencontre la circonférence Amm', la nouvelle circonférence que nous appellerons ω, a son centre sur cette symédiane. De plus, d'après le § XI, le point e est conjugué de A relativement à cette circonférence, et, par conséquent, les distances des six points p, q, r, p', q', r' à e et A sont proportionnelles :

$$\frac{pe}{p\mathrm{A}} = \frac{qe}{q\mathrm{A}} = \frac{re}{r\mathrm{A}} = \frac{p'e}{p'\mathrm{A}} = \frac{q'e}{q'\mathrm{A}} = \frac{r'e}{r'\mathrm{A}}.$$

Ajoutons que, d'après la propriété connue de la symédiane, on a aussi

$$\frac{me}{m\mathrm{A}} = \frac{m'e}{m'\mathrm{A}}.$$

Quant au centre ω, *il est au milieu de la droite* ll' *déterminée par les extrémités* l, l' *des diamètres qui passent en* A, *dans les deux circonférences* Aqr, Aq'r', *et qui sont situés, le premier sur* Am', *le second sur* Am. Car les projections de l, l', sur AB, étant q, q', et sur AC r, r', celles du milieu de ll' sont sur les milieux de qq', rr'.

Observons que p et p' n'intervenant pas dans cette construction du cercle ω, on peut obtenir ces deux points par l'intersection des circonférences ω, ABC.

Remarquons encore que, si K est la rencontre de qr et $q'r'$, AK est un diamètre du cercle Amm'; par conséqnent e, qui est l'intersection de ABC et de Aω est la projection de K sur Aω.

4° D'après le § XII, le podaire de m, relativement au triangle pqr, est directement semblable au podaire de M relativement à PQR. Mais on sait que celui-ci est directement semblable au podaire, relativement à ABC, de l'isogonal M' de M. Et comme cet isogonal est l'isocyclique de m, le podaire de m relativement à pqr est directement semblable au podaire relativement à ABC, de son isocyclique M'.

Signalons encore cette propriété : *Si* d_1 *est l'opposé harmonique de* A, *relativement à* Cm, *les circonférences* $\mathrm{Ad_1e}$, ACm' *sont tangentes : leur tangente commune, en* A, *passe par le centre de la circonférence* Apr.

En effet, le transformé D_1 de d_1 est le milieu de BM; $\mathrm{D_1E}$ est donc parallèle à BM', et tous deux sont perpendiculaires à

PR. Donc les circonférences Ad_1e, ACm' sont tangentes entre elles, et orthogonales à la circonférence Apr.

Même propriété pour les opposés harmoniques de A, relativement à Bm, Cm', Bm'.

Relations : $\frac{m_0}{Am^2} = \frac{X}{h}$, $\frac{M_0}{AM^2} = \frac{x}{h}$, où m_0, M_0 désignent les puissances de m, M relativement à la circonférence ABC, et X, x la première coordonnée normale de M, m.

On peut rattacher ces relations, dont il sera fait usage § XXIII, au 2° du théorème précédent. Soient f, f' les rencontres de la circonférence ABC avec Am, Am', et ff_1 un diamètre de la circonférence ABC. D'après 2°. Amp est semblable à f_1mf, et comme il est aussi semblable à APM, on a

$$\frac{mf}{MP} = \frac{2R}{MA}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{mf}{mA} = \frac{X}{h}$$

et par suite
$$\frac{m_0}{Am^2} = \frac{X}{h}.$$

Cette égalité subsiste quand on a égard aux signes de m_0 et de X; car la similitude de AOm, AMA', où A' est le transformé de O, c'est-à-dire le symétrique de A, relativement à BC, donne

$$\frac{Om}{R} = \frac{MA'}{MA}.$$

Ainsi, m est extérieur ou intérieur à la circonférence ABC, selon que M est du même côté de BC que A, ou du côté opposé, de sorte que m_0 et X sont toujours de même signe.

Cette relation peut, du reste, être établie indépendamment de la considération du point p, qui y est, au fond, étrangère. De

$$\frac{Om}{R} = \frac{MA'}{MA},$$

on tire
$$\overline{Om}^2 - R^2 = R^2 \frac{\overline{MA'}^2 - \overline{MA}^2}{\overline{MA}^2} = \frac{4R^2hX}{\overline{MA}^2};$$

d'où
$$\frac{m_0}{Am^2} = \frac{X}{h}.$$

permutation de m et M donne aussi

$$\frac{M_0}{AM^2} = \frac{x}{h}.$$

Corollaire. — Une conséquence à noter est l'égalité

$$\frac{Am}{Am'} = \frac{AM'}{AM} = -\frac{Mf'}{mf}.$$

D'après un théorème connu (voir *J. E.* 1891, p. 165) :

$$\frac{X}{h} = -\frac{M_0}{AM.Am'} = \frac{Mf'}{Am'},$$

et comme

$$\frac{X}{h} = \frac{m_0}{Am^2} = \frac{fm}{Am},$$

on a

$$\frac{Am}{Am'} = \frac{AM'}{AM} = -\frac{f'M}{fm}.$$

On aurait, par permutation,

$$\frac{Am'}{Am} = \frac{AM}{AM'} = -\frac{fM'}{f'm'};$$

ce qui s'accorde avec l'égalité connue, relative aux points isogonaux : $fm.f'm' = fM'.f'M$.

Relation générale entre les rapports

$$\frac{mp}{Ap}, \quad \frac{mq}{Aq}, \quad \frac{mr}{Ar}$$

et la distance Am.

X, Y, Z étant les coordonnées normales de M, transformons par inversion la relation

$$aX + bY + cZ = 2S.$$

$$X, \text{ ou } MP = \frac{bc}{Am}\cdot\frac{mp}{Ap}, \quad Y = \frac{bc}{Am}\cdot\frac{mq}{Aq}, \quad Z = \frac{bc}{Am}\cdot\frac{mr}{Ar}.$$

Ces égalités auront lieu en grandeur et en signe, dans les conditions suivantes : si Am est pris en valeur absolue, on considère $\frac{mp}{Ap}$ comme positif ou négatif selon que m est extérieur ou intérieur à la circonférence ABC; $\frac{mq}{Aq}$ comme positif ou négatif, selon que m est du même côté de AB que C ou du côté opposé; et, de même, $\frac{mr}{Ar}$, selon que m est du même côté de AC que B ou du côté opposé.

On aura ainsi la relation générale

$$a\frac{mp}{Ap} + b\frac{mq}{Aq} + c\frac{mr}{Ar} = Am\,\frac{a}{2R}.$$

Remarque. — Si les angles BAm, mAC sont définis en grandeur et en signe à $2K\pi$ près, on a, en grandeur et en signe,

$$\frac{mq}{Aq} = \sin BAm, \qquad \frac{mr}{Ar} = \sin mAC,$$

et une transformation facile donne

$$b \sin BAm + c \sin mAC = a \cos mAS,$$

où AS est le diamètre de la circonférence ABC. De sorte que la relation devient

$$\frac{mp}{Ap} = \frac{Am}{2R} - \cos mAS.$$

Expressions diverses de $\frac{mp}{Ap}$. — L'égalité précédente nous en donne une *première expression*. Si l'on désigne par φ l'angle (gS, gA) du triangle rectangle AgS considéré dans 1°, on a

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{Am}{2R \sin mAS};$$

et, par suite,

$$\frac{mp}{Ap} = \frac{(\sin mAS - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Une *deuxième expression* est donnée par la similitude de Apm, f_1fm,

$$\frac{mp}{Ap} = \frac{mf}{2R} = -\frac{m_0}{2RAm}.$$

Il faut remarquer d'ailleurs que dans le triangle f_1fm, l'angle en m est égal à φ et l'angle en f_1, à $mAS - \varphi$, de sorte que l'égalité $\frac{mp}{Ap} = \frac{mf}{2R}$ est identique avec

$$\frac{mp}{Ap} = \frac{\sin (mAS - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Le triangle Amp donne aussi

$$\frac{mp}{Am} = \frac{\sin (mAS - \varphi)}{\sin mAS}.$$

Une troisième expression est $\frac{mp}{Ap} = -\frac{x}{Am'}$. — Nous avons vu en effet, dans le corollaire relatif à la relation $\frac{m_0}{Am^2} = \frac{X}{h}$, que $\frac{X}{h} = \frac{Mf'}{Am'}$.

D'ailleurs $\frac{x}{h} = \frac{M_0}{AM^2} = -\frac{Mf'}{AM}$;

d'où $\frac{X}{x} = -\frac{AM}{Am'}$ (v. § XXIII, 2°). Et comme $\frac{mp}{Ap} = \frac{X}{AM}$, on conclut $\frac{mp}{Ap} = -\frac{x}{Am'}$. Égalité où il faut attribuer à Am' le signe, antérieurement défini, du rapport $\frac{Am'}{Am}$, puisque, dans la définition du signe de $\frac{mp}{Ap}$, Am a été supposé pris en valeur absolue. Or, le signe de $\frac{Am'}{Am}$ est le même que celui de $Am'.AM$, c'est-à-dire celui de la puissance de A, relativement à la circonférence $m'BC$. Il faut donc regarder Am' comme positif ou négatif, selon que A est extérieur ou intérieur à la circonférence $m'BC$.

Une quatrième expression, moins simple, résulterait de la transformation, par inversion, du second membre de la relation $\frac{s}{S} = \frac{\sum aYZ}{abc}$, dans laquelle s désigne l'aire PQR. Sachant que $\frac{s}{S} = -\frac{M_0}{4\pi^2}$, on obtient, par cette transformation,

$$\Sigma a \frac{mq}{Aq} \cdot \frac{mr}{Ar} = -\frac{ax}{2R}.$$

Expression des côtés des triangles pqr, p'q'r'. — La transformation de

$$\frac{QR}{AM} = \frac{a}{2R} \quad \text{donne} \quad qr = \frac{Aq, Ar}{Am} \cdot \frac{a}{2R};$$

celle de $\frac{PR}{BM} = \frac{b}{2R}$ donne $pr = \frac{Ap.Ar.Cm}{2R.Am}$;

et, de même, $pq = \frac{Ap.Aq.Bm}{2R.Am}$.

Ou encore

$$qr = \frac{Am.\sin A}{\cos mAC.BAm}, \qquad pr = \frac{Cm.\cos\varphi}{\cos mAC}, \qquad pq = \frac{Bm.\cos\varphi}{\cos BAm}.$$

Expressions analogues pour $q'r'$, $p'r'$, $p'q'$. Elles montrent, et c'est visible *a priori*, que

$$\frac{qr}{q'r'} = \frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{A}m'}.$$

Expression des angles des mêmes triangles. — Désignons ces angles par p, q, r, p', q', r', et par α, β, γ, α', β', γ', ceux des triangles mBC, m'BC, tous définis, suivant l'habitude, à $\mathrm{K}\pi$ près, et ces derniers liés, comme on sait, par les conditions

$$\alpha + \alpha' = \mathrm{A}, \qquad \beta + \beta' = \mathrm{B}, \qquad \gamma + \gamma' = \mathrm{C}.$$

Nous allons montrer que

$$p = \alpha', \qquad q = \beta' + \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad r = \gamma' - \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$p' = \alpha, \qquad q' = \beta + \frac{\pi}{2} - \varphi', \qquad r = \gamma - \frac{\pi}{2} + \varphi',$$

φ' ayant une définition analogue à celle de φ.

D'après les relations angulaires du § XII, on a

$$p = \mathrm{P} - (\mathrm{AQ}, \mathrm{AR}) = \mathrm{P} + \mathrm{A};$$

et comme PQR est symétriquement semblable à mBC, $\mathrm{P} = -\alpha$;

donc $$p = \mathrm{A} - \alpha = \alpha'.$$

D'après les mêmes formules,

$$q = \mathrm{Q} - (\mathrm{AR}, \mathrm{AP}),$$

et $$(mr, mp) = (\mathrm{MR}, \mathrm{MP}) - (\mathrm{AR}, \mathrm{AP})$$

ou $$\frac{\pi}{2} - \varphi = -\mathrm{B} - (\mathrm{AR}, \mathrm{AP}).$$

De là résulte :

$$q = \mathrm{Q} + \mathrm{B} + \frac{\pi}{2} - \varphi = \beta' + \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

On établit de même les autres égalités.

On peut y arriver encore en s'appuyant sur 3°; savoir *que le podaire de* m *relativement à* pqr *est semblable au podaire de* M *relativement à* ABC.

En effet les coordonnées angulaires de m, relativement à pqr, sont

$$(mq, mr) = 0, \qquad (mr, mp) = \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad (mp, mq) = -\frac{\pi}{2} + \varphi;$$

les angles du podaire de m, relativement à pqr, sont égaux à ceux du podaire de M′ relativement à ABC, c'est-à-dire égaux

à $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$. Donc les angles de pqr sont

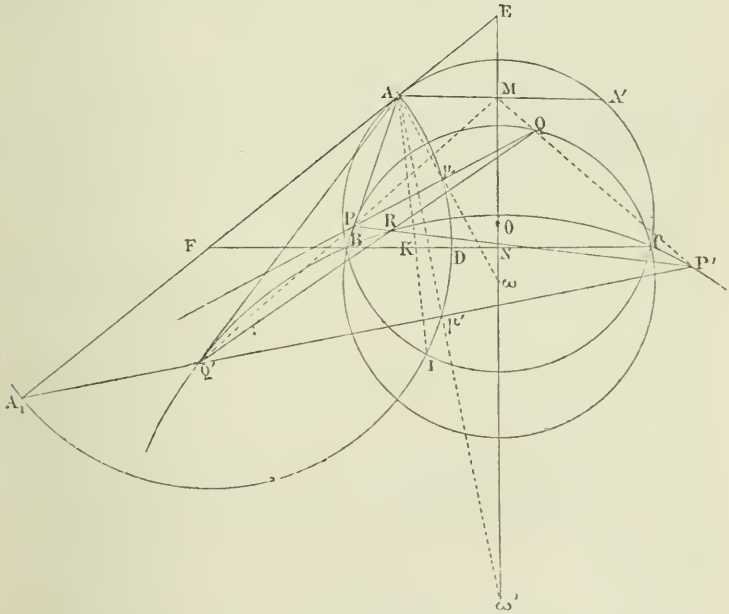
$$\alpha', \qquad \beta' + \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad \gamma' - \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Remarque. — Le point m' étant l'isocyclique de M, les angles α', β', γ', qui entrent dans ces formules, sont égaux aux coordonnées angulaires λ, μ, ν du point M. *(A suivre.)*

SUR LES CERCLES INVERSES (*)

Par M. **Sollertinsky**.

1. — *Le centre* ω d'un cercle quelconque Δ, passant par deux sommets B, C d'un triangle ABC, *le troisième sommet* A, *le mi-*



lieu M *de la corde* AA', menée dans le cercle ABC parallèlement à BC, *et les points de contact* P, Q des tangentes à Δ, menées

(*) Voyez nos Notes sur ce sujet, *J. E.* 1891, p. 114-120.

de A, appartiennent évidemment à *une même circonférence*, décrite sur ωA, comme diamètre.

Soient : ω' le centre du cercle Δ', inverse de Δ par rapport au triangle ABC; AP′, AQ′ les tangentes à Δ'.

Les points P et P′, Q et Q′ sont inverses par rapport au triangle ABC, et l'angle $\widehat{PAQ'}$ est égal à $\widehat{QAP'}$ (p. 116). Les triangles APQ′, AQP′ étant ainsi directement égaux, les circonférences APQ, AQ′P′ doivent passer par l'intersection des droites Q′P, P′Q. De là résulte que :

Les droites Q′P, P′Q *se coupent en* M, *et rencontrent* BC *en deux points isotomiques* (*).

2. — On sait que les polaires d'un point A, par rapport à toutes les circonférences d'un même faisceau, concourent en un même point A_1, diamétralement opposé à A sur le cercle qui coupe orthogonalement le faisceau. Ainsi :

Les droites PQ, P′Q′ *concourent au point* A_1 *diamétralement opposé à* A, *sur le cercle d'Apollonius du triangle* ABC (**).

Les milieux μ, μ' des droites PQ, P′Q′ sont donc sur le cercle d'Apollonius. Mais les côtés opposés PQ′, P′Q du quadrilatère PQ′P′Q étant égaux, la droite $\mu\mu'$ est parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{PMQ}$ et, par suite, perpendiculaire sur BC : elle a donc son milieu sur BC. *La droite* BC, passant d'ailleurs par le milieu de la troisième diagonale A_1M du quadrilatère PQ′P′Q, *divise chacune des droites* PP′, QQ′ *en deux parties égales* (***). De là, construction facile du cercle Δ', étant donné le cercle Δ :

Soit D le pied de la bissectrice intérieure de l'angle BAC. Si la droite $A\omega$, joignant A au centre ω de Δ, rencontre le cercle d'Apollonius en μ, on porte sur ce cercle, l'arc $D\mu'$ égal à $D\mu$. La droite $A\mu'$ rencontre la médiatrice de BC au centre ω' de Δ'. Par suite, *les centres des deux cercles inverses, relativement au triangle* ABC, *sont les points inverses par rapport au cercle* ABC.

(*) Dans le cercle AMQP, ω étant le milieu de l'arc PQ, $M\omega$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMQ}$.

(**) *A. Gob.* Sur quelques transformations des figures; Mathesis, p. 17.

(***) Les points P, P′ sont les foyers d'une conique touchant AB, AC et ayant pour asymptote BC″ *A. Gob, l. c.*).

3. — La dernière propriété que nous avons établie en supposant les points P, Q réels, a lieu dans tous les cas. En général :

BC *étant la corde commune des trois circonférences* Δ, Δ', Δ'', *si les centres* O′, O″ *des circonférences* Δ', Δ'' *sont les points inverses par rapport à la troisième* Δ, *le rectangle des puissances d'un point* A *de celle-ci, par rapport à deux autres, est équivalent au carré du produit* AB.AC; *et les circonférences* Δ', Δ'' *sont inverses par rapport au triangle* ABC.

Soient P, P′, P″ les projections des centres sur la droite AB, AH la hauteur du triangle ABC. On a

$$\overline{O'A}^2 - \overline{O'B}^2 = p' = 2AB.PP', \quad \overline{O''A}^2 - \overline{O''B}^2 = p'' = 2AB.PP''$$

d'où

$$p'.p'' = 4\overline{AB}^2.PP'.PP''.$$

Or on a $\dfrac{PP'}{OO'} = \dfrac{PP''}{OO''} = \dfrac{AH}{AB}$; $OO'.OO'' = \overline{OA}^2$.

Par suite, $p'.p'' = (2OA.AH)^2 = (AB.AC)^2$.

La circonférence Δ'' est l'inverse de Δ', relativement au triangle ABC, parce que la puissance de A par rapport à Δ'' est égale à celle qu'il devrait avoir par rapport à l'inverse de Δ' (*), et le point A est situé en dehors de BC.

4. — Il est intéressant de chercher le lieu du point d'intersection R des droites PP′, QQ′. Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

1° K étant le pied de la symédiane AK *du triangle* ABC, *le lieu des pôles de la droite* AA_1, *par rapport à toutes les circonférences passant par* B, C, *est une hyperbole* Γ *circonscrite au triangle* AKA_1.

2° E étant le point de rencontre de la droite AA_1 *avec la médiatrice de* BC ; E′ *son symétrique par rapport au milieu* I *de* AA_1 ; *la perpendiculaire en* E, *sur* EA, *et la parallèle à* BC, *menée par* E′, *sont les asymptotes de cette hyperbole.*

3° Si la circonférence MBC *rencontre* MA_1 *et la médiatrice de* BC, *respectivement en* R′, R″, *la droite* R′R″ *est le lieu du point* R. *C'est la polaire du point* M, *par rapport à* Γ.

(*) Après avoir multiplié les égalités (*lignes* 5-6 ; *l. c.* p. 116), on trouve $(AM.AN), (AM'.AN') = (AB.AC)^2$.

1° Les polaires des quatre points (A, A_1, T, l'infini de la droite AA_1) par rapport à toute circonférence, concourent en un même point p, et forment un faisceau harmonique. De plus, les polaires de chaque point, par rapport à toutes les circonférences passant par B, C, concourent en un point fixe. Ces points fixes sont respectivement A_1, A, K et point I à l'infini, dans la direction perpendiculaire sur AA_1. Mais le lieu des centres des faisceaux égaux, qui s'appuient sur quatre points fixes, est une conique passant par ces points.

La conique, lieu de p, a un autre point à l'infini, dans la direction BC : c'est le pôle de AA_1 par rapport à la droite BC.

2° L'asymptote, perpendiculaire sur AA_1, est tangente en I ; mais le quadrilatère A_1KAI étant *harmonique* par rapport à Γ (*), les tangentes aux points K, I se rencontrent sur la droite AA_1 ; et la tangente en K, qu'il nous reste à déterminer, est conjuguée harmonique de la droite KI, par rapport à l'angle $\widehat{A_1KA}$. Soit L la projection de K sur AA_1, N le milieu de BC. Le point K étant conjugué harmonique de T, par rapport à BC, on a

$$TK.TN = (TB.TC) = \overline{TA}^2;$$

mais

$$TL.TE = TK.TN,$$

d'où

$$\overline{TA}^2 = TL.TE.$$

Par suite, le point E étant conjugué harmonique de L, par rapport à AA_1, la droite KE est tangente, en K, à Γ.

3° Soient p, p' les points, où la droite MR rencontre PQ, P'Q'. Les droites Ap, Ap' étant les polaires de A_1, par rapport aux cercles Δ, Δ', les points p, p' appartiennent à l'hyperbole Γ. Mais le point R est conjugué harmonique de M, par rapport à pp' ; et par suite, appartient à la polaire de M par rapport à Γ.

Les circonférences MBC, A_1BC étant inverses par rapport au triangle ABC (**), et le point Q coïncidant, dans ce cas, avec

(*) Tout quadrilatère ABCD peut être considéré comme *harmonique* par rapport à une conique dont le centre se trouve ainsi : si E, F sont les points où AC, BD rencontrent la troisième diagonale, les droites joignant ces points aux milieux de BD, AC concourent au point cherché.

(**) De la similitude des triangles ABT, AA'C il s'ensuit que $AB.AC = (AT.AA') = AA_1.AM$.

le point M, le point P est sur A_1M et coïncide avec R : c'est le point désigné, dans l'énoncé, par R'. D'autre part, le point M', symétrique de M par rapport à A, appartient aussi à la polaire de M.

Enfin, la droite M'R', comme perpendiculaire sur A_1M, doit passer par R''.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 256.)

198. — *Si les perpendiculaires élevées sur les côtés d'un triangle, par les pieds des bissectrices, sont concourantes, le triangle est isoscèle.*

La condition de concours des perpendiculaires est :

$$\frac{a^2b^2}{(b+c)^2}-\frac{a^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}-\frac{a^2b^2}{(a+c)^2}+\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}-\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}=0,$$

ou

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0;$$

$$\frac{\Sigma a^2(b-c)(a+c)(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=0$$

$$\frac{(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=0,$$

qui ne peut être vérifiée que pour deux côtés égaux.

199. — *Lieu du point de Lemoine, pour les triangles qui ont même base et même angle au sommet.*

Prenons pour axes le côté donné et la perpendiculaire en son milieu nous aurons

$$(1)\qquad y=\frac{R\sin A}{\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C};$$

K étant, en outre, sur la droite qui joint le milieu de la hauteur au milieu du côté correspondant, on a

$$\frac{y}{x}=\frac{c\sin B}{c\cos B-b\cos C},$$

$$(2)\qquad \frac{x}{y}=\operatorname{cotg} B-\operatorname{cotg} C.$$

A étant constant, il suffit d'éliminer cotg B, cotg C entre (1) et (2), ce qui donne

$$y^2(4+3\operatorname{cotg}^2 A)+x^2-2Ry\cos A=R^2\sin^2 A,$$

équation d'une ellipse qui passe par B et C et qui est tangente, en ces points, au cercle circonscrit.

Son équation, en coordonnées trilinéaires normales, est

$$\Sigma \frac{yz}{bc} - \frac{3x^2}{a^2} = 0.$$

La tangente en K a pour équation

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{2x}{a} = 0,$$

ce qui montre qu'elle coupe le côté BC, au même point que la tangente, en A, au cercle circonscrit.

ÉCOLE MUNICIPALE

DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS

(16 juillet 1891.)

1° Résoudre le système :

$$2x + 3y + 2z = 0,$$
$$3x + 2y + z = 1 - m,$$
$$x + y + z = 2m + 3.$$

2° Les solutions x, y, z de ce système étant prises pour coefficients de l'équation $xu^2 + yu + z = 0$,
quelle valeur doit-on attribuer à m pour que l'une des racines u'' soit double de l'autre u'. Valeurs correspondantes de x, y, z et u.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

SPÉCIAL

(Session de juillet 1891.)

Algèbre et trigonométrie.

On connaît la surface S d'un triangle ainsi que les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit.

1° Former l'équation qui donne les tangentes des demi-angles aux sommets de ce triangle.

On trouvera, en désignant par x l'une de ces tangentes,

$$Sx^3 - r(4R + r)x^2 + Sx - r^2 = 0.$$

2° R et r étant donnés, entre quelles limites doit être compris S pour que le triangle soit possible?

Si l'on pose $D^2 = S(R - 2r)$, on trouvera

$$\frac{(R + D)^3 (R - D)^2 (3R - D)^3}{16R^4} > S^2 > \frac{(R - D)^3 (R + D)^2 (3R + D)^3}{16R^4}.$$

3° On donne $R = 8$ et $r = 3$; trouver les côtés du triangle de surface minimum et aussi ceux du triangle de surface maximum.

Géométrie descriptive.

Dans le plan vertical de projection est tracée une verticale D qui occupe le milieu de l'épure; autour de cette droite tourne un cercle C de rayon c, tangent au plan horizontal de projection, situé dans un plan parallèle au plan vertical de projection, à une distance b en avant de ce plan; de plus, le centre de ce cercle est à droite du plan vertical de profil mené par D, et à une distance a de ce plan.

1° Mettre cette surface en projection;

2° Prouver que, par chaque point M de cette surface il passe deux cercles C, C_1 tracés sur elle, dont les plans sont verticaux. En conclure que toute sphère menée par un cercle générateur C est tangente, en deux points, à la surface;

3° Prouver que, sur chaque cercle générateur C, il existe un couple de points réels P, P′ situés sur une même verticale, et qui sont tels que le plan tangent, en chacun d'eux, à la surface va passer au centre de la surface. En conclure que les plans tangents réels, issus de ce centre, à la surface, enveloppent un cône de révolution;

4° On demande de construire l'intersection de la surface avec un des plans tangents à ce cône, perpendiculaire au plan vertical de projection. Rabattre cette intersection sur un plan horizontal.

Données en centimètres :

$$a = 5, \quad b = 6, \quad c = 3.$$

Une rédaction détaillée doit accompagner l'épure; toutes les méthodes sont admises.

Mécanique.

Sur une même verticale sont trois points absolument fixes A, B, C. Autour de ces trois points sont articulées trois tiges AE, BE, CE, qui s'articulent entre elles à leur extrémité commune E.

En E est suspendu un poids P.

Les tiges sont de même nature et s'allongent ou se raccourcissent proportionnellement à leur longueur et à leur tension ou compression.

On considérera les variations de longueur des tiges comme des infiniment petits du premier ordre et on négligera les infiniment petits du second ordre.

On suppose qu'avant l'application du poids, P la tige BE est horizontale; elle a 2 mètres de long, la distance AB est égale à 2 mètres, et la distance BC à 1 mètre.

Une barre, de même nature que les tiges, ayant 1 mètre à l'état naturel, s'allonge de 1 centimètre sous l'action d'un poids de 1000 kilogrammes.

Le poids P est égal à 500 kilogrammes.

On demande de calculer, à 1 kilogramme près, les tensions ou compressions des tiges, et de calculer, à 1 millimètre près, les projections horizontale et verticale du déplacement du point E, après l'application du poids P.

On commencera par démontrer que si α, β, γ désignent les variations respectives des longueurs des tiges AE, BE, CE, on a

$$\sqrt{2}\,\alpha + \sqrt{5}\,\gamma = 3\beta.$$

N. B. — On ne tiendra pas compte du poids des tiges.

QUESTION 391

Solution par M. Victor de Strékalof, à Saint-Pétersbourg.

Résoudre les équations :

$$(y - z + b^2 - c^2)^2 = 4a^2x,$$
$$(z - x + c^2 - a^2)^2 = 4b^2y,$$
$$(x - y + a^2 - b^2)^2 = 4c^2z. \qquad \text{(G. L.)}$$

En extrayant la racine carrée de chacun des deux membres, on a

$$y - z + b^2 - c^2 = 2a\sqrt{x},$$
$$z - x + c^2 - a^2 = 2b\sqrt{y},$$
$$x - y + a^2 - b^2 = 2c\sqrt{z}.$$

Si l'on combine ces équations deux à deux, il vient :

$$y - 2b\sqrt{y} + b^2 = x + 2a\sqrt{x} + a^2,$$
$$z - 2c\sqrt{z} + c^2 = y + 2b\sqrt{y} + b^2,$$
$$x - 2a\sqrt{x} + a^2 = z + 2c\sqrt{z} + c^2;$$

ou

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \pm(b - \sqrt{y}) = \pm(a + \sqrt{x}), \\ \pm(c - \sqrt{z}) = \pm(b + \sqrt{y}), \\ \pm(a - \sqrt{x}) = \pm(c + \sqrt{z}). \end{array} \right\}$$

En prenant les deux membres de chacune des équations avec le même signe, on a

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = b - a, \\ \sqrt{y} + \sqrt{z} = c - b, \\ \sqrt{z} + \sqrt{x} = a - c, \end{array} \right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = (b - c)^2 \\ y = (c - a)^2 \\ z = (a - b)^2 \end{array} \right\}$$

Il est facile de vérifier que toute autre combinaison de signes, dans les équations (A), amène à des équations non compatibles pour les valeurs des constantes arbitraires a, b, c; par suite, les valeurs (B) sont les seules qui satisfassent aux équations proposées (*).

(*) Cette dernière assertion n'est pas exacte.
Ainsi : $x = (b - c)^2$, $y = (a + c)^2$, $z = (a + b)^2$, etc sont des solutions du système proposé. G. L.

QUESTION 385

Solution par Mme Vve Prime.

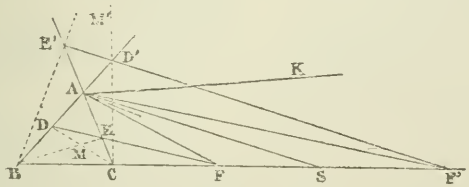
Dans l'angle A *d'un triangle* ABC, *et dans son opposé par le sommet, on trace deux droites* DE, D'E', *antiparallèles à* BC *et équidistantes de* A. *Faire voir que si* M *est la rencontre de* BE *et* CD, *et* M' *la rencontre de* BE', CD', *les droites* AM, AM' *sont conjuguées harmoniques, relativement à la médiane et à la symédiane, issues de* A, *dans le triangle* ABC. (Bernès.)

Soient F et F' les points où DE et D'E' rencontrent BC;

Traçons AG parallèle à DE;

et AK parallèle à BC.

Les droites DE, D'E' sont équidistantes du sommet A; G



est le milieu de FF'; par suite, le faisceau A(KF'GF) est harmonique.

Or: la polaire de AK dans l'angle BAC est la médiane issue de A;

Celle de AF' est AM';

Celle de AG est la symédiane (*);

Celle de AF est AM.

Or, on sait que si quatre droites issues du sommet d'un angle forment un faisceau harmonique, il en est de même de leurs polaires.

(*) Ce passage qui pourrait n'être pas compris de tout le monde, peut s'expliquer ainsi :

La droite AG, dont il est ici question, est tangente en A à la circonfé-

QUESTION 384.

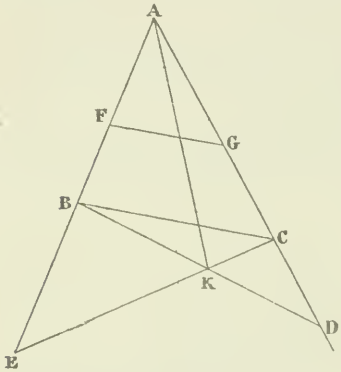
Solution par Mme Vve F. Prime.

Dans un triangle ABC, *les perpendiculaires en* B, C, *à* AB, AC *rencontrent* AC, AB *en* D, E. *Démontrer que, si une parallèle quelconque à* BC *rencontre* AB, AC *en* F, G, *l'axe radical des circonférences* BGD, CFE *passe par* A *et par le centre de la circonférence* ABC. (Bernès.)

Soit K le point de rencontre des droites BD, CE : AK doit être l'axe radical en question ; il faut donc démontrer :

$$AF.AE = AG.AD$$

et $$BK.KD = CK.KE.$$



Cette dernière résulte de ce fait que les quatre points E, B, C, D sont sur une même circonférence.

De cette remarque, on déduit encore

$$AB.AE = AC.AD.$$

En remplaçant AB, AC par les quantités proportionnelles AF, AG, on obtient la seconde des égalités qu'il fallait établir.

Nota. — Autre solution par M. Grolleau maître-répétiteur au lycée de Marseille.

---

rence circonscrite à ABC ; elle coupe BC en un point G, tel que

$$\frac{GB}{GB} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{b^2}{c^2}.$$

La polaire de G, par rapport à l'angle BAC, est une droite coupant BC en un point G′, tel que

$$\frac{G'C}{G'B} = \frac{GC}{GB}.$$

On a donc

$$\frac{G'C}{G'B} = \frac{b^2}{c^2}.$$

On sait alors, ou l'on démontre facilement, que la droite partant de A, symétrique de la médiane relativement à la bissectrice de BAC, la symédiane enfin, qui va de A au point de Lemoine, coupe BC en un point qui partage ce côté dans le rapport $b^2 : c^2$. G. L.

QUESTION 395

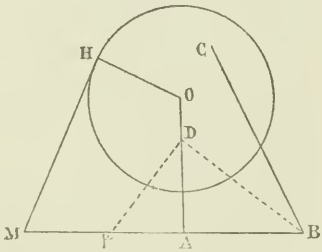
Solution par M. B. Sollertinsky.

On donne un cercle, une droite qui ne le rencontre pas et une autre droite, et l'on considère le rapport de la longueur de la tangente au cercle, issue d'un point quelconque de la première droite, avec la distance du même point à la seconde. Démontrer que ce rapport sera le plus petit possible lorsque le point se trouvera sur la polaire de l'intersection des deux droites par rapport au cercle.

(A. Tissot.)

Soit A la projection du centre O du cercle donné, sur la première droite AB. Portons, sur AO, la longueur AD de la tangente au cercle, menée de A.

On sait (*) que la tangente au cercle, issue d'un point quelconque M de AB, est égale à MD. D'autre part, la distance de M, à l'autre droite donnée BC, est dans un rapport constant avec MB.



Ainsi, on est conduit à chercher le minimum de

$$\frac{MD}{MB}, \quad \text{ou de} \quad \frac{\sin MBD}{\sin MDB}.$$

L'angle $\widehat{MBD}$ étant fixe, ce minimum correspond à la valeur maxima de sin MDB : le point cherché μ est donc sur la perpendiculaire en D, à BD.

Ce point a la même puissance $\overline{\mu D}^2$ par rapport au cercle O et à celui qui est décrit de B, avec le rayon BD; mais l'axe radical de ces cercles est la polaire de B, par rapport au cercle O.

Nota. — Nous avons reçu une solution analytique de Mme veuve Prime, à Bruxelles et une solution trigonométrique de M. Grolleau, au lycée de Marseille.

(*) On a, en effet,

$$\overline{MH}^2 = \overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MA}^2 + \overline{OA}^2 - R^2,$$

ou

$$\overline{MH}^2 = \overline{MD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{OA}^2 - R^2.$$

AD étant égale à la tangente issue de A, on a

$$\overline{OA}^2 = R^2 + \overline{AD}^2.$$

Finalement

$$MH = MD.$$

QUESTION 392

Solution par M. B. Sollertinsky.

Étant donnés deux cercles fixes Δ, Δ' *situés dans un même plan; on prend, dans ce plan, un point* arbitraire M. *Les polaires* M, *par rapport aux circonférences* Δ, Δ', *se coupent en* M′.

Démontrer qu'il existe un cercle fixe Δ'' *(réel ou imaginaire) tel que* M, M′ *soient* conjugués *par rapport à ce cercle.*

Ce cercle Δ'' *est le lieu des points qui ont, par rapport aux circonférences* Δ, Δ' *des puissances égales et de signes contraires.*

(G. L.)

Soit Δ_1 un cercle quelconque du faisceau déterminé par les cercles donnés Δ, Δ'.

Par le point arbitraire M, on peut faire passer un cercle δ coupant orthogonalement les cercles Δ, Δ', et par suite Δ_1. Mais, d'après un théorème connu(*), les polaires du point M. par rapport aux cercles Δ, Δ', Δ_1, concourent en un point M′, diamétralement opposé à M, sur δ.

Les points M, M′ sont donc conjugués par rapport à tout cercle Δ_1 du faisceau Δ, Δ'.

Déterminons, maintenant, le cercle Δ''.

Soient : O, O′ les centres des cercles donnés; r, r' leurs rayons; d, la distance OO′; O″ le milieu de OO′; P, un point situé sur Δ''.

On a, par définition,

$$\overline{PO}^2 - r^2 = -(\overline{PO'}^2 - r'^2)$$

d'où $$r^2 + r'^2 = \overline{PO}^2 + \overline{PO'}^2 = 2\overline{PO''}^2 + \frac{d^2}{2}.$$

Par suite, $$\overline{PO''}^2 = \frac{2(r^2 + r'^2) - d^2}{4};$$

c'est-à-dire que le cercle Δ'' a son centre en O″ et son diamètre

(*) Lorsque deux circonférences sont orthogonales, la polaire d'un point M de la première, par rapport à la seconde, passe par le point M′ diamétralement opposé à M.

en égal à

$$\sqrt{2(r^2 + r'^2) - d^2}.$$

Pour tout point P′ de l'axe radical des cercles Δ, Δ′, on a

$$\overline{P'O}^2 - r^2 = P'O'^2 - r'^2 = \mu.$$

d'où

$$\mu = \frac{\overline{P'O}^2 + \overline{P'O'}^2 - (r^2 + r'^2)}{2} = \overline{P'O''}^2 - \frac{2(r^2 + r'^2) - d^2}{4}.$$

Le cercle Δ″ appartient donc au faisceau des cercles Δ, Δ′; par suite, il satisfait à la question.

Remarque I. — Le cercle Δ″ devient imaginaire, si l'on a

$$d > \sqrt{(r + r')^2 + (r - r')^2}.$$

Remarque II. — Deux points sont dits conjugués par rapport au cercle lorsque la polaire de l'un passe par l'autre. Les points M, M′ sont donc conjugués par rapport à *tout* cercle Δ, coaxial avec les cercles Δ, Δ′. En effet, le cercle δ, mené par M orthogonalement aux cercles Δ, Δ′, coupe aussi orthogonalement le cercle Δ_1; mais les polaires de M par rapport à ces trois cercles passent par le point M′, diamétralement opposé à M sur δ.

Le cercle Δ″, qui a son centre au milieu de la distance d des cercles Δ, Δ′, et dont le rayon est égal à $\frac{2(r^2 + r'^2) - d^2}{4}$, satisfait aussi à la question, parce qu'il est coaxial avec les cercles Δ, Δ′; mais, comme on voit, ce n'est pas la solution unique.

QUESTION 396

Solution par M. B. Sollertinsky.

Si le triangle $A_1A_2A_3$, *de forme invariable, se meut dans son plan, de manière que les sommets* A_1 *et* A_2 *parcourent deux figures inversement semblables, le troisième sommet* A_3 *décrit une figure de même ordre que les figures* F_1 *et* F_2, *ou bien une ligne droite qui passe par le point double des figures* F_1 *et* F_2.

(G. Tarry.)

Soient $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ deux positions quelconques du triangle. Les points de rencontre des figures F_1, F_2, avec les droites correspondantes A_1B_1, A_2B_2, divisent ces droites en parties proportionnelles. Par suite, si l'on divise, de la même manière, la droite A_3B_3, les points de division appartiendront à la figure F_3, décrite par A_3 (H. Van Aubel, *J. E.* p. 113).

Ainsi, à tout point d'intersection de la figure F_1, avec une droite A_1B_1, correspond le point d'intersection de F_3 avec la droite A_3B_3.

Supposons maintenant que A_3B_3 rencontre encore F_3 en un point M_3 dont le correspondant M_1, n'appartienne pas à la droite A_1B_1.

Soient α, α' les points divisant A_1A_2 dans le rapport de similitude des figures F_1, F_2 : on sait que ces points se meuvent sur les droites doubles Δ, Δ' de F_1, F_2. (R. Baltzer.)

Si la droite A_3B_3 ne passe pas par l'intersection S des droites Δ, Δ' (le point double des figures), les triangles $A_3\alpha\alpha'$, $B_3\beta\beta'$, $M_3\mu\mu'$, directement semblables, sont inscrits au triangle formé par ces droites ; par suite, ils ont le même centre de similitude. Mais alors tout point A_1, lié à la figure $A_3\alpha\alpha'$ doit décrire une droite : c'est-à-dire que M_1 doit se trouver sur A_1B_1, et notre supposition n'a pas lieu dans ce cas.

Dans l'autre cas, lorsque les droites A_3B_3, Δ, Δ' concourent en un même point S, les triangles $A_3\alpha\alpha'$, $B_3\beta\beta'$... étant homologiques, le centre d'homologie S est le point commun de leurs cercles circonscrits (*Mathesis*, 1891, p. 194). Alors la figure F_3 se réduit à la droite A_3B_3, parce qu'étant donnés les points α, α', le point A_3 se trouve à l'intersection de cette droite avec le cercle $S\alpha\alpha'$. Mais pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait $\widehat{\alpha A_3\alpha'} = \widehat{\alpha S\alpha'} = \frac{\pi}{2}$; ainsi, $A_3\alpha$, $A_3\alpha'$ doivent être les bissectrices de l'angle $\widehat{A_1A_3A_2}$; par suite, *le rapport des côtés* A_3A_1, A_3A_2 *est égal au rapport de similitude des figures* F_1, F_2.

Inversement, cette condition étant remplie, le triangle $\alpha A_3\alpha'$, de forme invariable, est rectangle en A_3, et deux de ses sommets α, α' se meuvent sur deux droites rectangulaires $S\alpha$,

$S\alpha'$: alors le troisième sommet A_3 décrit une droite passant par S.

Remarque. — Dans cette question je n'ai pas démontré deux propositions :

I. — A_1, A_2 *étant les points homologues des figures* F_1, F_2 *inversement semblables, si l'on divise* A_1A_2, *aux points* α, α', *dans le rapport de similitude, les points de division se meuvent sur deux droites rectangulaires* Δ, Δ' *(les droites doubles) qui se coupent au point double des figures.* (R. Baltzer.)

Soient B_1, B_2 deux autres points homologues. Puisque les côtés opposés A_1A_2, B_1B_2 du quadrilatère $A_1B_1B_2A_2$ sont divisés dans le rapport des côtés adjacents A_1B_1, A_2B_2, les droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont parallèles aux bissectrices de l'angle $(\widehat{A_1B_1, A_2B_2})$, et sont, par suite, rectangulaires. Soit S leur point d'intersection. Les faisceaux $SA_1A_2\alpha\alpha'$, $SB_1B_2\beta\beta'$ étant d'ailleurs harmoniques, $S\alpha$, $S\alpha'$ sont les bissectrices des angles $\widehat{A_1SA_2}$, $\widehat{B_1SB_2}$. Donc en retournant la figure F_2 autour $S\alpha$ ou de $S\alpha'$, on fait deux figures homothétiques. Ainsi, S est leur point double et $S\alpha$, $S\alpha'$ sont leurs droites doubles.

II. — *Si deux triangles directement semblables* ABC, A'B'C' *sont homologiques, ils sont homothétiques, ou bien les centres de similitude et d'homologie sont les deux points d'intersection des circonférences circonscrites.* (*M.* 1891, p. 194) (*).

Soient : S le centre d'homologie : D, D' les points où les circonférences SAB, SA'B' rencontrent la droite SC. Alors les triangles ABD, A'B'D' sont directement semblables. Donc, les triangles ACD, A'C'D' sont aussi directement semblables, et par suite homothétiques. Donc, si les triangles ABC, A'B'C' ne sont pas homothétiques, les points C et D, C' et D' doivent coïncider.

(*) Cette proposition m'a été communiquée par M. Sollertinsky, il y a plus d'un an. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

420. — Soient a, b, c les longueurs des trois côtés BC, CA, AB d'un triangle; et α, β γ les angles que forment ces côtés avec une direction fixe quelconque, dans le plan, ces angles étant comptés de *zéro* à 2π. Démontrer qu'on a

$$a^3 \cos 3\alpha + b^3 \cos 3\beta + c^3 \cos 3\gamma = 3abc \cos(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$a^3 \sin 3\alpha + b^3 \sin 3\beta + c^3 \sin 3\gamma = 3abc \sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

(Laisant.)

421. — Démontrer que les distances p_a, p_b, p_c des sommets A, B, C d'un triangle, à une tangente commune au cercle circonscrit et au cercle ex-inscrit de l'angle A, satisfont à l'égalité

$$ap_a \cos^2 \frac{A}{2} = bp_b \sin^2 \frac{B}{2} + cp_c \sin^2 \frac{C}{2}.$$

(Louis Bénézech.)

422. — Une circonférence quelconque passant par le point de Lemoine K d'un triangle ABC, détermine sur les segments de droites KA, KB, KC, des points A′, B′, C′ tels que

$$am_a KA' + bm_b KB' + cm_c KC' = 0,$$

(a, b, c désignant les côtés du triangle; m_a, m_b, m_c les médianes.)

(Louis Bénézech.)

ERRATA

Page 189, ligne 3 (en remontant). *Au lieu de* $(h^2 - 2a^2)$ *lisez* $(h^2 - 2a^2)^2$.
Page 190, ligne 4 (en remontant). *Au lieu de* OB′ *lisez* OB'_1.
Page 191, ligne 4. *Au lieu de* XP *lisez* OP.
ligne 8 *Au lieu de* p *lisez* h.
Page 261, ligne 2 (en remontant). *Il faut* $2r \cos^2 \alpha$ *au lieu de* $2r \cos \alpha$.
Page 262. *Au lieu de* $\rho' = \dfrac{2r \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha - 1}$ *lisez* $\rho' = \dfrac{2r \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha - 1}$.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 25614-11-91.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Arithmétique et Algèbre.

Sur l'évaluation des moyennes, par M. *C.-A. Laisant*. 7
Démonstration élémentaire du théorème de Bachet, par M. *A. Matrot*. 169
Sur la somme et le produit de deux entiers positifs, par M. *Ch. Michel* 193

Géométrie.

Coordonnées quadripolaires, par M. *L. Bénézech*. 3, 25, 97, 149
Des cordonnées angulaires, par M. *Lormeau* . . .35, 73
Expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre, en fonction de ses arêtes, par M. *Bernès*. 49
Démonstration élémentaire du théorème de Frégier . 50
Des coordonnées angulaires, par M. *Poulain* 52
Sur la méthode de transformation de M. Schoute, par M. *E. Vigarié*, 101, 129, 153, 181, 207
Sur les points et les droites de Feuerbach, par *G. L.*. 101
Transformation par inversion symétrique, par M. *Bernès*, 127, 145, 175, 197, 217, 244, 265
Sur la question 323, par M. *Neuberg*. 137
Sur la perspective d'une figure plane, par M. *C.-A. Laisant*. 151
Application de la théorie du centre des distances proportionnelles, par M. *L. Bénézech* 241
Sur les cercles inverses, par M. *B. Sollertinsky*. . . . 273

Pages.

Baccalauréat.

Baccalauréat ès sciences (Paris), session d'octobre 1890 et session d'avril 1891. . 162
Id. (juillet 1891). . . . 186

Concours divers.

École spéciale militaire (1891) 159
École navale (1891) 160
Agrégation (1891). . . . 186
Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles (1891). . . . 213
Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire spécial (1891). 258
Concours général en 5e année de l'enseignement secondaire spécial (1891). . 259
Ecole municipale de Physique et de Chimie industrielles de Paris (1891). . 278
Agrégation de l'enseignement secondaire spécial (1891) 278

Mélanges et Correspondance.

Essai sur un programme de mathématiques à l'usage de la classe de mathématiques élémentaires supérieure, par M. *Humbert*, 12, 32, 59, 83
Lettre de M. *Lemoine*, à propos d'un problème de M. *Lauvernay* 15
Lettre de M. *Mosnat*, à propos de la question 32 . . 16
Les Progrès de la Géométrie du Triangle en 1890, par *E. Vigarié*. . . 8, 28, 56, 80
Lettre de M. *Humbert*, pré-

Pages

cisant deux points du programme de mathématiques élémentaires. . . . 87
Note sur la question 318, par M. *Bernès*. 90
Lettre de M. *Bernès* relative à l'article de M. *Lormeau* et à celui de M. *Poulain*. 109
Lettre de M. *Neuberg* à propos de la question 318. . 112
Exercices divers, par M. *A. Boutin*, 132, 157, 184, 224, 256, 277
Lettres de M. *E. Lemoine* et *A. Boutin* au sujet de l'article *Sur les points et les droites de Feuerbach* . . . 134
Lettre de M. *Poulain* au sujet de la question 378. . 254
Lettre de M. *Vigarié* signalant certaines rectifications ou errata à sa Note sur la *Transformation de M. Schoute* 256

Bibliographie.

Cours d'Algèbre et applications à la Géométrie, par M. *Combette*. 17
Cours de Cosmographie et de Topographie, par MM. *Combette* et *Porchon* . . . 17
Cours de Géométrie descriptive, par M. *J. Caron* . . 17
Cosmographie, par *E. Catalan*. 44
Annuaire du bureau des longitudes (1891). 45
Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels, par M. *Prosper de Lafitte* 45
Géométrie élémentaire, par *Z. de Galdeano* 63
Euclid revised, par *C.-J. Nixon* 63
Supplément to Euclid revised, par *C.-J. Nixon* (compte-rendu, par M. *Vigarié*) 87
Complément d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par *A. Macé de Lépinay* 88
Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre, par M. *Clément Thiry* . . 89
Démonstration élémentaire du théorème de Bachet, par M. *Matrot* (compte-rendu par M. *Humbert*). . 113
Arithmétique élémentaire, par *Jean Macé*. 114
Pantobiblion 136
Compositions données aux examens de Saint-Cyr depuis 1872, par *A. Grévy* . 136
Die Brocardschen Gebilde, par M. le Dr *Emmerich* (compte-rendu par M. *E. Vigarié*) . . . . . .
Nomographie, par M. *M. d'Ocagne*. 227
Géométrie de MM. *Rouché* et *de Comberousse* (sixième édition) 252
Cours de trigonométrie; cours élémentaire de statique; cours abrégé d'algèbre élémentaire, par M. *Combette* 253
Éléments d'arithmétique; éléments d'algèbre; éléments de cosmographie, par M. *J. Badier*. 254

Questions proposées.

381 à 422.

Questions résolues.

322, 339, 354, 355, 374, 356, 324, 331, 352, 362, 349, 353, 357, 358, 338, 363, 364, 366, 368, 367, 370, 373, 377, 369, 373, 193, 374, 375, 371, 388, 372, 376, 378, 294, 383, 379, 380, 381, 391, 385, 384, 395, 392, 396.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

ARTZT, 58, 101, 105, 210.
VAN AUBEL, 286.
AUBERT, *professeur au lycée de Rennes*, 15.
AZOULAY, *membre de la Société philomatique*, 7.
BADIER (J.), 254.
BALTZER (R.), 286, 287.
BARISIEN (E.-N.), 264.
BAUDRAN, *élève au lycée de Rouen*, 165, 237, 238.
BÉNÉZECH (L.), 3, 25, 97, 127, 149, 192, 216, 239, 240, 241, 288.
BERNÈS, *professeur honoraire*, 24, 49, 90, 93, 109, 112, 119, 121, 141, 145, 163, 165, 175, 191, 192, 197, 214, 217, 228, 230, 244, 265, 281, 282.
BOUBALS, 215.
BEYENS (J.), *capitaine du génie à Cadix*, 21, 67, 143.
BOUTIN (A.), 38, 80, 81, 82, 132, 134, 135, 153, 156, 157, 184, 211, 215, 224, 255 256, 277.
BROCARD, 28, 229.
CAPELLI, 183.
CARON, *professeur de géométrie descriptive*, 17.
CASEY, 82.
CATALAN (E.), *professeur émérite de l'Université de Liège*, 23, 24, 29, 30, 44, 57, 64, 72, 92, 139, 165, 215, 239, 263, 264.
CESÀRO, *professeur à l'Université de Palerme*, 9, 47.
DE COMBEROUSSE, 252.
COMBETTE, *Inspecteur de l'Académie de Paris*, 19, 253.
DELLAC, *professeur au lycée de Marseille*, 23.
EMMERICH, 213.
FALISSE, 82.
FOUCHÉ, 140.
FUHRMAN, 57, 58, 101, 154, 210.
GALDEANO (Z. de), *professeur à l'Université de Saragosse*, 63.
GOB (A.), *professeur à Liège*, 19, 30, 31, 101, 175, 177, 198, 210.
GREENSTREET (W.), 238.
GRÉVY (A.), *professeur au lycée de Bar-le-Duc*, 136.
GROLLEAU, *maître répétiteur au lycée de Marseille*, 238, 282, 283.
HADAMARD, *professeur au lycée Janson-de-Sailly*, 30.
HUMBERT, *professeur au lycée Louis-le-Grand*, 12, 32, 48, 59, 83, 87.
LAFFITTE (Prosper de), *ancien élève de l'Ecole Polytechnique*, 45.
LAISANT, *docteur ès sciences*, 7, 151, 192, 288.
LALBALÉTRIER, 54, 57.
LAUVERNAY, 15, 29, 57, 72, 164.
LAVIEUVILLE, *professeur au collège de Dieppe*, 236, 238.
LEDOUX, *élève au lycée de Limoges* 237.
LEMOINE (E.), *ancien élève de l'école Polytechnique*, 9, 15, 23, 28, 29, 101, 131, 134, 135, 143, 166, 210, 229, 240.
LÉVY (Lucien), *examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique*, 96.
LIÉNARD, 103.
LORMEAU, *étudiant à la Faculté des sciences d'Angers*, 35, 109, 112.
LONGCHAMPS (G. de), 17, 21, 24, 59, 63, 67, 68, 82, 88, 95, 96, 101, 106, 112, 113, 143, 144, 167, 188, 209, 231, 234, 238, 280, 284.
LUCAS (Ed.), 9.
MACÉ (Jean), *sénateur inamov.* 114.
MACÉ DE LÉPINAY, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV*, 88.
MANDART, 58, 80.

MANNHEIM, *professeur à l'École Polytechnique*, 48, 144.
MANSION, *professeur à l'Université de Gand*, 28.
MARANO (Pietro), *étudiant privé à Catana*, 22.
MATROT, *ingénieur en chef des Mines*, 113, 169.
M'CAY, 253.
MICHEL (Ch.), *élève au collège Chaptal*, 157, 193.
MILNE, 88.
MOREL (A.), *ancien élève de l'Ecole Polytechnique*, 28.
MORGAN JENKINS, 79.
MOSNAT, 16.
MULLER, 30.
NEUBERG, *professeur à l'Université de Liège*, 15, 30, 31, 56, 76, 77, 79, 82, 94, 101, 105, 112, 129, 137, 153, 175, 183, 208, 210, 214, 229.
NIXON, 87.
D'OCAGNE, *ingénieur des Ponts et Chaussées*, 18, 227, 229, 230.
PEXER, 294.
PHILASTRE, 21, 140, 231.
POUJADE, *professeur au lycée de Lyon*, 46.
POULAIN, 9, 33, 52, 56, 57, 73, 101, 105, 111, 112, 131, 254.
PRIME (F.) (Mme), 231, 238, 281, 282, 283.
ROUCHÉ (E.), 252.
RUSSO (G.), 142, 261.
SCHLÖMILCH, 28.
SCHOUTE, *professeur à l'Université de Groningue*, 10, 101, 144, 153, 157, 181, 183, 207, 210.
SOLLERTINSKY (B.), *professeur à Gatschina* (Russie), 18, 19, 21, 22, 46, 63, 68, 92, 94, 114, 139, 141, 142, 163, 164, 188, 191, 228, 229, 231, 232, 235, 238, 259, 262, 273, 283, 284, 285, 287.
STRÉKALOF (V. de), 280.
SVÉCHNICOFF, *professeur au gymnase de Troïtzk* (Russie), 68, 231, 238, 259, 261.
TARRY (G.), 21, 29, 144, 229, 285.
TAYLOR, 74.
THIRY (Clément), 57, 89.
TISSOT (A.), 143, 168, 233, 283.
VAN DEN BERG, 103, 210.
VIGARIÉ (E.), 8, 28, 56, 64, 74, 80, 88, 101, 115, 129, 153, 181, 207, 214, 229, 231.
VLADIMIRESCU, 236, 261.
YOUSSOUFIAN, *professeur à l'École Milkié, à Constantinople*, 142, 234, 260.

NOTA

Les personnes habitant l'étranger, qui accepteraient d'être, à titre gracieux, le correspondant du Journal, dans leur pays, sont priées de me le faire savoir. *G. L.*

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25614-11-91.

QA
1
J6836
sér.3
t.5E

Math.

Journal de mathématiques
élémentaires

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY